

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА ЗАВЪРШВАНЕ НА
ОБРАЗОВАТЕЛНО-КВАЛИФИКАЦИОННА СТЕПЕН
„БАКАЛАВЪР“
СПЕЦИАЛНОСТ „МАТЕМАТИКА“

11 септември 2014 г.

Задача 1. Дадена е линейната оптимизационна задача:

$$(P) \begin{cases} \text{да се минимизира} & z(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + (a - 3)x_2 + a(a + 1)x_3 \\ \text{при ограничения} & \begin{aligned} ax_1 + (a - 3)x_2 + (1 - a + a^2)x_3 &= a - 1 \\ x_1 - 2x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{aligned} \end{cases}$$

където a е параметър със стойности различни от едно. За кои стойности на параметъра a е изпълнено:

- а) точката $\bar{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T$ е единствен оптимален опорен план на тази задача;
- б) точката $\bar{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T$ е оптимален опорен план на тази задача, но не е единствен - да се определи общия вид на оптималните планове;
- в) целевата функция намалява неограничено в множеството от допустимите стойности за x_1, x_2 и x_3 ;
- г) има съседен опорен план на задачата, за който целевата функция има по-малка стойност.

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$, линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

(а) Да се докаже, че ако характеристичните корени x_1, x_2, x_3 на φ изпълняват равенството $x_1 + x_2 = 2x_3$, то $abc = 0$.

(б) Ако характеристичните корени x_1, x_2, x_3 на φ изпълняват равенствата

$$x_1 + x_2 = 2x_3 \quad \text{и} \quad x_1x_2 + 3(x_1 + x_2)^3 = 0,$$

да се намери ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази диагонална матрица D .

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!