

Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика
Специалност "Математика"

Държавен изпит за образователно-квалификационна степен
"Бакалавър" – задачи
16 септември, 2006 г.

Зад. 1. Нека e_1, e_2, e_3 е стандартният базис в евклидовото пространство $\mathbf{R}^3$ и φ е линеен оператор, действащ по правилото

$$\varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3) = (\xi_2 + \xi_3) e_1 + (\xi_1 - \xi_3) e_2 + (\xi_1 - \xi_2) e_3.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbf{R}^3$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази диагонална матрица.

Зад. 2. Нека $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, където $n \geq 0$ е цяло число. Да се докаже, че

$$\text{а) } I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(= \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} \right);$$

б) $1 - \frac{1}{3} \binom{n}{1} + \frac{1}{5} \binom{n}{2} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{n}{n} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, където $\binom{n}{k}$ са биномните коефициенти.

Време за работа – 3 часа

Драги абсолвенти,

- номерирайте всички страници от беловата и черновата си;
- решенията на двете задачи пишете на отделни листи.

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа.