УМНС 30.04.15

$$w_i \approx \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Th/

Ако $f(\vec{x},t)$ е непрекъсната с непрекъснати частни производни в $(V+S)(t)$, то

$$\frac{d}{dt}\int_V f\,dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \int_S f V_n\,dS,$$ или

$$\frac{d}{dt}\int_V f\,dV = \int_V \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(f v_i)\right\} dV,$$ където v_i са компонентите на вектора на скорост $\vec{V}$.

Док.

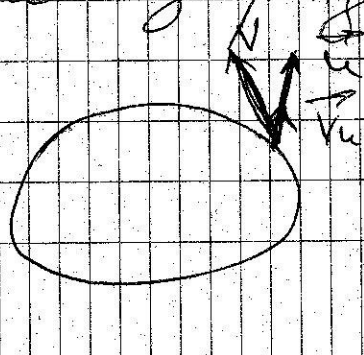
$V_n \overset{def}{=} \vec{V}\vec{n}$ - нормалната компонента на скорост на точките от S

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f\,dV = \lim_{t'\to t} \frac{\int f(\vec{x},t')\,dV' - \int f(\vec{x},t)\,dV}{t'-t} =$$

$$\lim_{t'\to t} \frac{\int_V \{f(\vec{x},t') - f(\vec{x},t)\}\,dV + \int_{V'-V} f(\vec{x},t')\,dV}{t'-t} =$$

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \lim_{t'\to t} \int_{V'-V} \frac{f(\vec{x},t')}{t'-t} \cdot \underbrace{V_n (t'-t)\,dS}_{dV} =$$

$$= \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \int_S f(\vec{x},t)\,dS,$$ след граничен преход, защото $dV \approx (t'-t)V_n\,dS$, тъй като повърхнината загражданe $V' \to S$ при $t' \to t$



8 Закони за запазване

$\dot{f}$ - частна производна на $f(\vec{x},t)$ по времето t

$\mathring{f}$ - материална производна на $f(\vec{x},t)$ по времето, т.е.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathring{f} = \frac{df}{dt}, \quad f_{,i} \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

А Закон за запазване на масата

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(\vec{x},t)\,dV = 0$$ По предната Th.

$$\int_{V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(\rho v_i)\,dV = 0$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\right) d\vec{x} = 0.$$ Ако подинтегралната ф-я е непрекъсната $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$

Th на Рейнолдс $\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(\vec{x},t)\, g(\vec{x},t)\,dV = \int_{V(t)} \rho(x,t)\frac{dg}{dt}\,dV$

за произволна непрекъснато диференцируема функция $g(\vec{x},t)$

Док. От предната Th. $\Rightarrow f = \rho g$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f\,dV = \int_{V} \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(f v_i)\right\} dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(\vec{x},t)\, g(\vec{x},t)\,dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho g v_i)\right) dV =$$

$$\int_{V(t)} \left\{\dot{\rho} g + \rho \dot{g} + (\rho v_i)_{,i}\, g + \rho v_i g_{,i}\right\} dV =$$

$$\int_{V(t)} \Big\{ \big(\overset{0}{\dot\rho + (\rho v_i)_{,i}}\big) g + \rho \big(\overset{\dot g}{\dot g + v_i g_{,i}}\big) \Big\} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{dg}{dt}(\vec{x}, t)\, dV$$

3 Закон за запазване на количество движение или линеен момент

Припомняне. За точка с маса m, линейния момент е $m\vec{v}$. От II-ри закон на Нютон, знаем че $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$, $\frac{d}{dt} m\vec{v} = \vec{F}$

Производната по времето t на количеството на движение на произволна част от деформиращото се тяло е равна на сумата от силите (масови и повърхнинни), които действат на тази част от тялото, т.е. $\vec{p} = m\vec{v}$, и i-тата компонента на количеството на движение е

$\int_{V(t)} \rho(\vec{x}, t)\, v_i\, dV$ => Закон за запазване на линейния момент

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\vec{x}, t)\, v_i(\vec{x}, t)\, dV = \underbrace{\int_{V(t)} \rho f_i(\vec{x}, t)\, dV}_{\text{масови сили}} + \underbrace{\int_S \sigma_i(\vec{x}, t)\, dS}_{\text{повърхнинни сили}}$$

Така получаваме II-закон на Нютон в интегрална форма

По Th на Гаус $\int_S \sigma_{ij} n_j\, dS = \int_V \sigma_{ij,j}\, dV = 0$

$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i - \sigma_{ij,j}\right) dV = 0$ при непрекъснатата подинтегрална функция $\Rightarrow \sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho w_i$ където w_i са компонентите на ускорение, у-ята на движението или ЗЗ на линейния момент

8 Закон за запазване на момента на количеството на движение

Преговор

Ъгловият момент на т. с маса m е $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$

Понеже при материалната точка масата е const

$\Rightarrow \vec{L} = m\vec{x} \times \vec{v}$ т.е. $\int_{V(t)} \rho(\vec{x},t)\, e_{ijk}\, x_j v_k \, dV$

Твърд. Производната по времето t на момента на количеството на движение е равна на момента на действащите външни сили (масови и повърхнинни) т.е. $\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(\vec{x},t)\, v_k e_{ijk} x_j \, dV =$

$\int_{V(t)} \rho(\vec{x},t)\, f_k e_{ijk} x_j \, dV + \int_{S(t)} e_{ijk} x_j \underbrace{\sigma_{k\ell} n_\ell}_{\sigma_k,\ \text{Гаус}} dS$, където

моментите са написани спрямо началото на координатната система с начало O.

$\sigma_i(\vec{x}, t, \vec{n}) = \sigma_{ij}(\vec{x},t) n_j$. Оттук по Рейнолдс $\Rightarrow$

$$\int_{V(t)} \rho e_{ijk} \frac{d}{dt}(x_j v_k)\, dV = \int_{V(t)} \rho e_{ijk} x_j f_k \, dV + \int_{V(t)} e_{ijk}(\delta_{\ell j}\sigma_{k\ell} + x_j \sigma_{k\ell,\ell})\, dV$$