УМНС 26.02.15

Вектора трябва:
1) да не променя големината си при ротация
2) да не променя нито посоката, нито големината си при транслация

Какво е вектор в $\mathbb{R}^2$ (2,3)
Прилагаме въртене по часовниковата стрелка, т.е.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \text{ Нека } \varphi = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3} \\ -1+\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ т.е.}$$

получихме различна наредена двойка, но

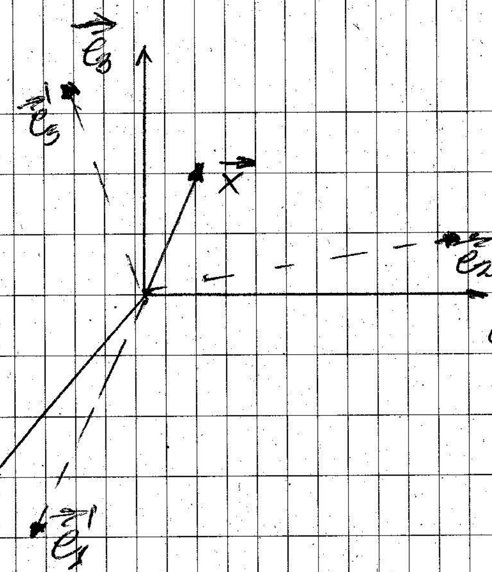
$$\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}, \ \sqrt{\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow$$

дължината се запазва

Какво е вектор в $\mathbb{R}^3$
математически обект, чиято ~~големина~~ големина не се променя при въртене, но си променя посоката и големината при транслация
Разгл. дясно ориентирана декартова коорд. сист.

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_i\vec{e}_i$$

Завъртаме коорд. сист. $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ до положение $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$, $\vec{x} = x_1'\vec{e}_1{}' + x_2'\vec{e}_2{}' + x_3'\vec{e}_3{}' = x_i'\vec{e}_i{}'$



Скалара е тензор от ранг 0
Вектора е тензор от ранг 1
Тензор от ранг 2 се представя като матрица 3x3 (nxn)

Тензора не зависи от това къде го гледаме (пример: мерене на t° в една точка от различни места ляво, дясно, горе, долу във фиксирана точка от времето)

$\vec{e}_i' \vec{e}_j' = \delta_{ij}$ - делта Кронекер, $i,j = 1,2,3$
$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Дефинираме $\alpha_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j = 1.1.\cos(\vec{e}_i', \vec{e}_j)$
Следователно, $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ са директорните косинуси на x_1' оста по отношение на старата координатна система $Oe_1e_2e_3$, $\alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23}$ - директорните косинуси на x_2' оста ~~по~~ отн. $Oe_1e_2e_3$, $\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}$ - директорните косинуси на x_3' по отношение $Oe_1e_2e_3$

Първият индекс на α по дефиниция е индекса на x'
Таблица на директорните косинуси

$\cdot$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}_2'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}_3'$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

! Умножаваме скаларно $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ с $\vec{e}_i^{\,\prime}$ отляво, т.е. $\vec{e}_i^{\,\prime}\vec{x} = x_1\vec{e}_i^{\,\prime}\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_i^{\,\prime}\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_i^{\,\prime}\vec{e}_3 =$

$= x_1\alpha_{i1} + x_2\alpha_{i2} + x_3\alpha_{i3}$

От друга страна $\vec{x}\vec{e}_i^{\,\prime} = x_i^{\prime}$

(следва от $\vec{x} = x_1^{\prime}\vec{e}_1^{\,\prime} + x_2^{\prime}\vec{e}_2^{\,\prime} + x_3^{\prime}\vec{e}_3^{\,\prime}$ и δ_{ij})

Следователно десните страни са равни и получ

$$x_i^{\prime} = x_1\alpha_{i1} + x_2\alpha_{i2} + x_3\alpha_{i3} = x_j\alpha_{ij} \Rightarrow$$

$$x_i^{\prime} = \alpha_{ij}x_j \quad \text{и} \quad x_i = \alpha_{ji}x_j^{\prime} \quad !!!$$

Трансформационни закони

Заместваме $x_i = \alpha_{ji}x_j^{\prime}$ в $x_i^{\prime} = \alpha_{ij}x_j = \alpha_{ij}$

$\parallel$

$\delta_{ik}x_k^{\prime}$

$x_i = \alpha_{kj}x_k^{\prime} \Rightarrow \alpha_{ij}\alpha_{kj} = \delta_{ik}$

Подобно получаваме чрез заместване на $x_i^{\prime}$ в x_i

$\alpha_{ji}\alpha_{jk} = \delta_{ik}$. Това показва че матриците са ортогонални

Заместваме подобно

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 &= 1 \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 &= 1 \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} &= 0 \\ \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} &= 0 \\ \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} &= 0 \end{aligned}$$

Казваме че $x_1^{\prime}x_2^{\prime}x_3^{\prime}$ осите са ортогонални

$[\alpha_{ij}][\alpha_{ij}]^T = [I]$

$[\alpha_{ij}]^T[\alpha_{ij}] = [I]$

$[\alpha_{ij}]^{-1} = [\alpha_{ij}]^T$ т.е. $[\alpha_{ij}]$ е ортогонална матрица

Деф. Декартов тензор от първи ранг (вектор) е обект, който може да се представи като наредена тройка от реални числа във всяка коорд. сист. (декартова), със св-вото, че ако $(a_1 a_2 a_3)$ е представянето на този обект в сист-та x_i $(O e_1 e_2 e_3)$ и $(a_1' a_2' a_3')$ е представянето на този обект в сист-та x_i', тогава a_i и a_i' се подчиняват на следните закони за трансформиране

$a_i' = \alpha_{ip} a_p$, $a_i = \alpha_{pi} a_p'$. Тогава a_i и a_i' се наричат компонентите на тензора от първи ранг в сист-те x_i и x_i' съответно

Тензорно произведение на вектори

Разгл. вектор с компоненти $(b_1 b_2 b_3)$ в коорд. сист. x_i и същият вектор с компоненти $(b_1' b_2' b_3')$ в коорд. сист. x_i'. Тогава $b_i' = \alpha_{ij} b_j$ и $b_i = \alpha_{pi} b_p'$. Същото се отнася за втори вектор $\vec{a}$.

нова / стара; стара / нова

Получаваме $a_i' b_j' = (\alpha_{ip} a_p)(\alpha_{jq} b_q) = \alpha_{ip}\alpha_{jq} a_p b_q$

Същото се прави и при $a_i b_j$ ⇒

$a_i b_j = (\alpha_{pi} a_p')(\alpha_{qj} b_q') = \alpha_{pi}\alpha_{qj} a_p' b_q'$

Забелязваме, че $[a_i b_j]$ е 3×3 матрица в x_i сист-та, а $[a_i' b_j']$ е 3×3 матрица в x_i' сист-те. Елементите на тези матрици се трансформират по законите $a_i' b_j' = \alpha_{ip}\alpha_{jq} a_p b_q$ и $a_i b_j = \alpha_{pi}\alpha_{qj} a_p' b_q'$

$[a_i b_j]$ са компонентите на тензорното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\vec{a} \otimes \vec{b}$ - тензорно произведение. Това е пример за тензор от втори ранг при $\vec{a}$ - тензор от първи ранг и $\vec{b}$ - тензор от първи ранг

Деф. Декартов тензор от втори ранг е обект, който може да се представи като 3×3 матрица във всяка декартова коорд. сист. със св-вото, че ако $[a_{ij}]$ е матрицата представяща този обект в x_i сист-ма, и $[a'_{ij}]$ е матрицата представяща този обект в x'_i сист-ма то a_{ij} и a'_{ij} се трансформират по следният начин

$a'_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq} a_{pq}$ и $a_{ij} = \alpha_{pi}\alpha_{qj} a'_{pq}$. Тогава a_{ij} и a'_{ij} се наричат компоненти на тензора от втори ранг в коорд. сист-и x_i и x'_i