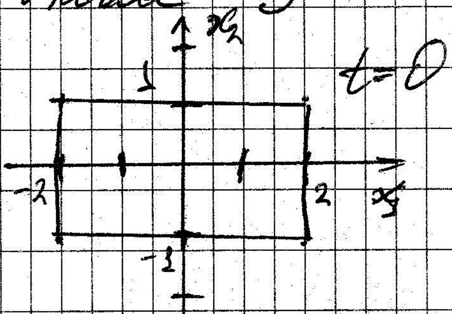
УМНС 19.03.15

Зад1

Разглеждаме хомогенната деформация на правоъгълен блок B с върхове в точките $(-2,1)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(2,-1)$. Деформацията е дефинирана с изображение

$$\vec{x}(\vec{X}) = \frac{1}{2}(6+4x_1+3x_2)\vec{e}_1 + (3+x_2)\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Скицирайте деформираната конфигурация на блока B

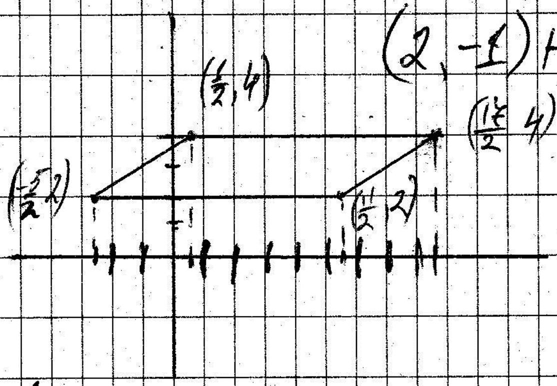


$$(-2,1) \mapsto \frac{1}{2}(\underbrace{6-8+3\cdot 1}_{x_1}, \underbrace{3+1}_{x_2}) = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

$$(2,1) \mapsto \frac{1}{2}(6+8+3, 3+1) = \left(\frac{17}{2}, 4\right)$$

$$(-2,-1) \mapsto \frac{1}{2}(6-8-3, 3-1) = \left(\frac{-5}{2}, 2\right)$$

$$(2,-1) \mapsto \frac{1}{2}(6+8-3, 3-1) = \left(\frac{11}{2}, 2\right)$$



Зад 2 Движението на непрекъснатата среда е дадено с

$$x_1 = X_1 \cos At + X_2 \sin At$$
$$x_2 = -X_1 \sin At + X_2 \cos At$$
$$x_3 = (1+Bt)X_3$$

където $A, B = const$

а) Намерете компонентите на вектора на преместване в материални координати

б) Намерете компонентите на вектора на преместване в пространствени координати

Реш а) $\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \Rightarrow$

$u_1 = x_1 - X_1 = X_1 \cos At + X_2 \sin At - X_1 =$
$X_1(\cos At - 1) + X_2 \sin At$

$u_2 = x_2 - X_2 = -X_1 \sin At + X_2 \cos At - X_2 =$
$-X_1 \sin At + X_2 (\cos At - 1)$

$u_3 = x_3 - X_3 = (1 + Bt) X_3 - X_3 = X_3 Bt$

б) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos At & \sin At & 0 \\ -\sin At & \cos At & 0 \\ 0 & 0 & 1+Bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ получаем обратного изображение

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos At & -\sin At & 0 \\ \sin At & \cos At & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+Bt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ т.е.

$X_1 = \cos At \, x_1 - x_2 \sin At$
$X_2 = x_1 \sin At + x_2 \cos At$
$X_3 = \frac{x_3}{1+Bt}$

Следовательно

$u_1 = x_1 (1 - \cos At) + x_2 \sin At$
$u_2 = x_2 (1 - \cos At) - x_1 \sin At$
$u_3 = \frac{Bt \; x_3}{1+Bt}$

Зад 3 За движ-то на непр-та среда, дадена в предишната задача, намерете:

а) скоростта в материални координати

б) скоростта в пространствени координати

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos At + X_2 \sin At \\ x_2 = -X_1 \sin At + X_2 \cos At \\ x_3 = (1+Bt) X_3 \end{cases}$$

скоростта $\vec{V} \overset{def}{=} \frac{d}{dt} \vec{u}$

$\vec{V} = (V_1\ V_2\ V_3)$

Реш

а) 1) Ако изразим $\vec{u}$ с Лагранжиеви координати тогава $V_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}(\vec{X}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial t}$

2) Ако изразим $\vec{u}$ с Ойлерови координати тогава

$$V_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_i - X_i(x_1, x_2, x_3, t)\right) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}$$

От $V_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \Rightarrow V_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = -X_1 A \sin At + X_2 A \cos At$

$V_2 = -X_1 A \cos At - X_2 A \sin At$

$V_3 = B X_3$

б) вече сме намерили $X_1 = x_1 \cos At - x_2 \sin At$

$X_2 = x_1 \sin At + \cos At\, x_2$

$X_3 = x_3 / 1 + Bt$

Тогава

$V_1 = -A \sin At (x_1 \cos At - x_2 \sin At) + A \cos At (x_1 \sin At + x_2 \cos At)$

$V_2 = -A \cos At (x_1 \cos At - x_2 \sin At) - A \sin At (x_1 \sin At + x_2 \cos At)$

$V_3 = B x_3 / 1 + Bt$

Зад 4 Даден е законът за движение на непрекъснатата среда

$$x_1 = X_1$$

$$x_2 = \frac{e^t(X_2+X_3)}{2} + \frac{e^{-t}(X_2-X_3)}{2}$$

$$x_3 = \frac{e^t(X_2+X_3)}{2} - \frac{e^{-t}(X_2-X_3)}{2}$$

Определете компонентите на скоростта в Ойлеров и Лагранжев вид

Реш/ в Лагранжев вид $V_i = \frac{dx_i}{dt}$

$$V_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{e^t(X_2+X_3)}{2} - \frac{e^{-t}(X_2-X_3)}{2} \\ V_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{e^t(X_2+X_3)}{2} + \frac{e^{-t}(X_2-X_3)}{2} \end{aligned}\right\} \text{в Лагранжев вид}$$

$$V_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad u_1 = x_1 - X_1 = 0$$

Второто и третото уравнение получава

$$\begin{cases} X_2 + X_3 = e^{-t}(x_2 + x_3) & \text{(събираме } x_2 \text{ и } x_3\text{)} \\ X_2 - X_3 = e^{t}(x_2 - x_3) & \text{(изваждаме } x_2 \text{ и } x_3\text{)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= x_1 \\ X_2 &= \frac{e^{-t}(x_2+x_3)}{2} + \frac{e^{t}(x_2-x_3)}{2} \\ X_3 &= \frac{e^{-t}(x_2+x_3)}{2} - \frac{e^{t}(x_2-x_3)}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$u_2 = x_2 - \frac{e^{-t}(x_2+x_3)}{2} - \frac{e^{t}(x_2-x_3)}{2}$$

$$u_3 = x_3 - \frac{e^{-t}(x_2+x_3)}{2} + \frac{e^{t}(x_2-x_3)}{2}$$

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \overset{0}{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\overset{V_2}{\frac{dx_2}{dt}} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\overset{V_3}{\frac{dx_3}{dt}} =$$

$$V_3 = x_2$$

Зад. 6 Дадено е полето на скоростите

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = \frac{2x_2}{1+t}, \quad v_3 = \frac{3x_3}{1+t}$$

Намерете компонентите на ускорението

Реш.

ускорението $\vec{w} \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt}\vec{v}$

$$w_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}$$

$$w_1 = \frac{-x_1}{(1+t)^2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overset{v_1}{\frac{dx_1}{dt}} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\overset{v_2}{\frac{dx_2}{dt}} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\overset{v_3}{\frac{dx_3}{dt}} =$$

$$= -\frac{x_1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t}\,\frac{x_1}{1+t} + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$$

$$w_2 = -\frac{2x_2}{(1+t)^2} + \frac{2}{1+t}\cdot\frac{2x_2}{1+t} = \frac{2x_2}{(1+t)^2}$$

$$w_3 = \frac{-3x_3}{(1+t)^2} + \frac{3}{1+t}\cdot\frac{3x_3}{1+t} = \frac{6x_3}{(1+t)^2}$$

Зад. Интегрирайте полето на скоростите от предната задача и получете у-та на преместване $x_i = x_i(\vec{X}, t)$ т.е. закона за движение. След това го използвайте за да намерите компонентите на ускорението в Лагранжиев вид

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = \frac{2x_2}{1+t}, \quad v_3 = \frac{3x_3}{1+t}$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{1+t} \Rightarrow \int\frac{dx_1}{x_1} = \int\frac{dt}{t+1} \Rightarrow \ln|x_1| = \ln(1+t) + \ln$$

$$\ln|x_1| = \ln((1+t) + C_1) \Rightarrow |x_1| = (1+t)C_1$$

$x_1 = C(1+t)$, $C \in \mathbb{R}$. Понеже при $t = 0$

$$x_1 = X_1 \Rightarrow x_1 = C(1+t) = C = X_1 \Rightarrow x_1 = X_1(1+t)$$

$V_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{2x_2}{1+t} \Rightarrow \int \frac{dx_2}{dt} = \int \frac{2x_2}{1+t} \Rightarrow$

$\ln|x_2| = 2\ln(1+t) + \ln C_2 \Rightarrow$

$|x_2| = (1+t)^2 C_2 \Rightarrow x_2 = C(1+t)^2, \quad C \in \mathbb{R}$

При $t=0$, $x_2 = X_2 \Rightarrow x_2 = X_2(1+t)^2$

за $x_3 \Rightarrow x_3 = X_3(1+t)^3$

От предната задача имаме компонентите в Ойлеров вид. Сега просто заместваме направо във формулата

$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{2x_2}{(1+t)^2}, \quad \omega_3 = \frac{6x_3}{(1+t)^2}$

$$\left.\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{2}{(1+t)^2} X_2 (1+t)^2 = 2X_2 \\ \omega_3 &= \frac{6x_3}{(1+t)^2} X_3 (1+t)^3 = 6X_3(1+t) \end{aligned}\right\} \text{в Лагранжев вид}$$

Лекция

dx - дължината на $\vec{x}$, dX - дължината на $\vec{X}$

При малки деформации $dx = dX$

$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx + dX) = 2e_{ij}\,dX_i\,dX_j$

Съкращаваме на $(dX)^2 \Rightarrow \frac{dx-dX}{dX} \cdot \cancel{\frac{2dX}{dX}} =$

$\cancel{2} e_{ij} \frac{dX_i}{dX} \cdot \frac{dX_j}{dX} \Rightarrow \frac{dx-dX}{dX} = \varepsilon, \; \frac{dX_i}{dX} = \nu_i, \; \frac{dX_j}{dX} = \nu_j$

където $\mathcal{E} = e_{ij} u_i u_j$, и $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ е единичен вектор по посока $\overrightarrow{P_0Q_0} = d\vec{X}$

Смисълът на $\dfrac{dx - dX}{dX}$ е относителното удължение на линейният елемент dX в т. P_0

За предположим $dX := dX_1$ т.е. $dX = (dX_1, 0, 0)$ по посока $\vec{e}_1$. Тогава $\dfrac{dx_1 - dX_1}{dX_1} = \varepsilon_{11}$

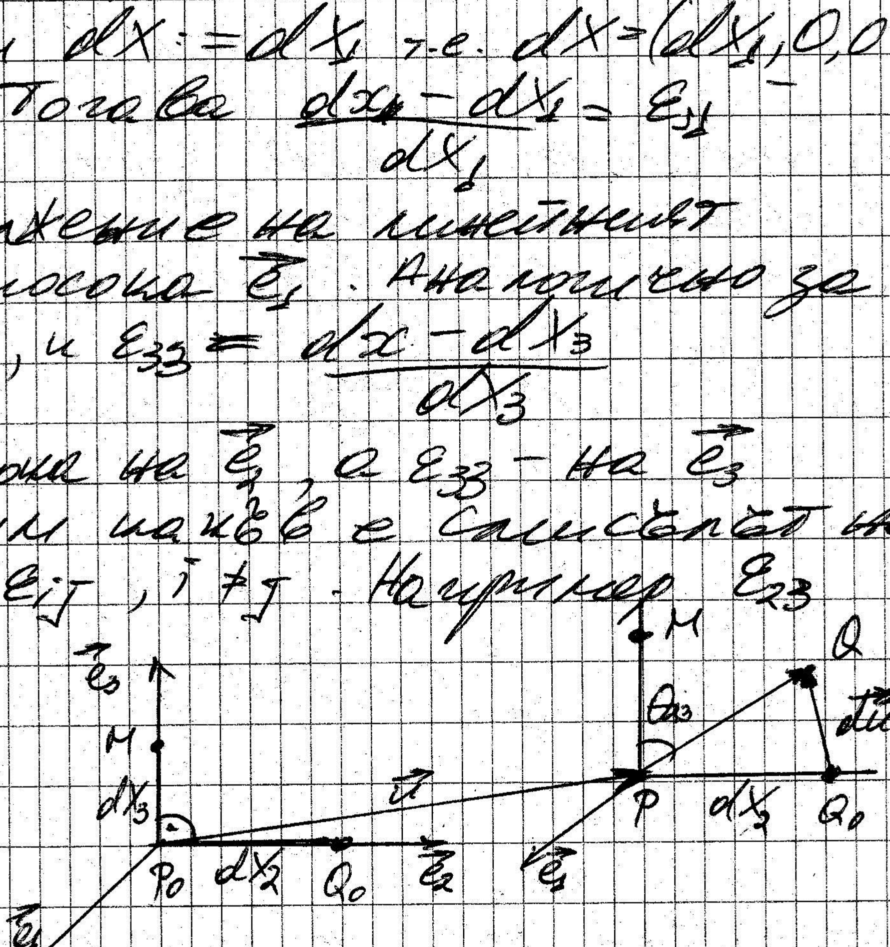
относителното удължение на линейният елемент по посока $\vec{e}_1$. Аналогично за

$\varepsilon_{22} = \dfrac{dx - dX_2}{dX_2}$, и $\varepsilon_{33} = \dfrac{dx - dX_3}{dX_3}$

като ε_{22} е по посока на $\vec{e}_2$, а ε_{33} – на $\vec{e}_3$

Остава да видим какъв е смисълът на компонентите e_{ij}, $i \neq j$. Например ε_{23}

Разгл. векторите P_0Q_0, P_0M т.е. $(0, dX_2, 0)$ и $(0, 0, dX_3)$



Понеже $du_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j$

можем да запишем

$$\vec{e}_2^{\,*} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{dX_2} = \frac{\overrightarrow{P_0Q_0} + d\vec{u}}{dX_2} = \frac{(0 + du_1,\ dX_2 + du_2,\ 0 + du_3)}{dX_2} =$$

$$= \left(\frac{du_1}{dX_2},\ 1 + \frac{du_2}{dX_2},\ \frac{du_3}{dX_2}\right) \overset{\text{при малки деф.}}{\sim} \left(\frac{du_1}{dX_2}\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \frac{du_3}{dX_2}\vec{e}_3\right)$$

пренебрегваме заради 1.

$|\vec{e}_2^*| = 1$

$\vec{e}_3^* = \frac{\vec{PM}}{dX_3} \approx \frac{\partial u_1}{dX_3}\vec{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_3}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \,, \quad |\vec{e}_3^*| = 1$

Означаваме с $\theta_{23} = \angle(\vec{PQ}, \vec{PM})$. $\cos\theta_{23} =$

$= \vec{e}_2^* \cdot \vec{e}_3^* = \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 2\varepsilon_{23}$

$\frac{\pi}{2} - \theta_{23} = \gamma_{23} \approx \sin\gamma_{23}$

$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}$ от γ_{23}, а $\gamma_{23} = \frac{\pi}{2} - \theta_{23} \Rightarrow$

$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}$ от изменението на $\angle$ м/у 2 линейни елемента по посока e_2 и e_3