ЗМНС 16.04.15

Повърхнина на тензора на напрежение
Главни направления на тензора на напрежение и главни напрежения. Инварианти на тензора на напрежение

Деф. Компонентите на вектора на напрежение който действа върху повърхнинен елемент с единична нормала $\vec{n}$ в произволна фиксирана т. P на тялото се дават с формулата:

$$\sigma_i(\vec{x}, t, \vec{n}) = \sigma_{ij}(\vec{x}, t)n_j \quad , \quad \sigma_i = \sigma_{ij}n_j$$

Означаване със σ_n (нормално напрежение) - алгебричната проекция (големината) на вектора на напрежение върху единичната нормала

$$\sigma_n = \sigma_i n_i = \sigma_{ij} n_j n_i$$

Нека означим $\vec{\xi}$ с компоненти $\xi_i = \xi n_i$, т.е. $\vec{\xi} \parallel \vec{n}$ и алгебричната му стойност да изберем т.ч. $\xi^2 \sigma_n = \pm k^2$, $k \neq 0$, $\Rightarrow \xi^2 \sigma_n = \sigma_{ij}\xi_i\xi_j$. Следователно края на произволният вектор ξ с начало в т. P (произв. фиксирана) и удовлетворяващ $\xi^2\sigma_n = \pm k^2$. Неговият край лежи на квадратичната повърхнина $2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \overset{def}{=} \sigma_{ij}\xi_i\xi_j = \pm k^2$ на тензора на напрежение по Коши

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij}\frac{\xi_j}{\xi} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial F}{\partial \xi_i}$$ където $\frac{\partial F}{\partial \xi_i}$ е един вектор на тази повърхнина

Векторът на напрежението T действащ в т. P в/у площадка с нормала $\vec{n}$, е ∥ на нормалата $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ към повърхнината на напрежението в точката с радиус вектор $\vec{q} = q_i \vec{e}_i$

Главни направления и инварианти

Деф. Главни направления (оси) на тензора на напрежението, се наричат тези направления за които $\vec{T} \parallel \vec{n}$ т.е. $T_i = T_N n_i$. Тогава

$(T_{ij} - T\delta_{ij}) n_j = 0$ е уравнение на собствени вектори на T_{ij}. Това е хомогенна система с 3 линейни уравнения за неизвестните n_1, n_2, n_3. Тази система има ненулево решение ако $\det|T_{ij} - T\delta_{ij}| = 0 =$

$$-(T - T_I)(T - T_{II})(T - T_{III}) = -T^3 + I_T T^2 - II_T T + III_T = 0$$

където $I_T = T_I + T_{II} + T_{III} = tr(T_{ij})$

$$II_T = T_I T_{II} + T_{II} T_{III} + T_I T_{III}$$

$$III_T = T_I T_{II} T_{III} = \det(T_{ij}) \quad \text{т.е. } T_{ij} \sim \begin{pmatrix} T_I & & \\ & T_{II} & \\ & & T_{III} \end{pmatrix}$$

Ако изберем осите на коорд. сист. $\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$ по такъв начин, че те да съвпадат с главните направления на T_{ij}, т.е. със неговите собствени вектори, то повърхнината $T_{ij} q_i q_j = \pm k^2$, ще придобие вида $T_I q_1^2 + T_{II} q_2^2 + T_{III} q_3^2 = \pm k^2$, защото диагонизирани T_{ij}

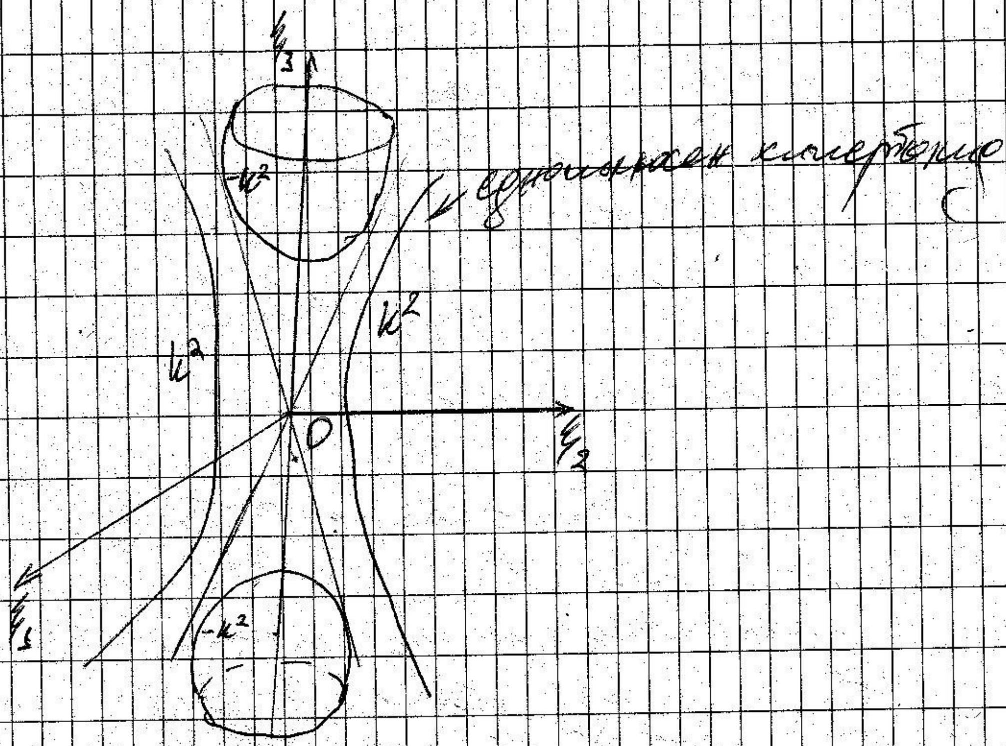
Нека разгл. възможните случаи за знаците на главните напрежения, и $(T_I T_{II} T_{III}) \to$ нейните собствени стойности

I сл. $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} > 0$. Тогава трябва да изберем знак „+" пред k^2
Разглежданата повърхнина на Коши е елипсоид
$$\sigma_I \nu_1^2 + \sigma_{II} \nu_2^2 + \sigma_{III} \nu_3^2 = k^2$$
σ_N - опън, $\nu^2 \sigma_N = k^2 \Rightarrow \sigma_N = \frac{k^2}{\nu^2} > 0$, и се нарича опънно напрежение

II сл. $0 > \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$. Тогава трябва да изберем знак „-" пред k^2
Разглежданата повърхнина на Коши е елипсоид но σ и σ_i са с противоположни знаци, т.е.
$$\sigma_I \nu_1^2 + \sigma_{II} \nu_2^2 + \sigma_{III} \nu_3^2 = -k^2.$$ Тогава $\sigma_N = -\frac{k^2}{\nu^2}$
и това условие е по-малко от 0. Нарича се натисково напрежение

III сл. $\sigma_I > \sigma_{II} > 0$, $\sigma_{III} < 0$ (аналогично за $\sigma_I < 0$ или $\sigma_{II} < 0$)
Тогава
$$\sigma_I \nu_1^2 + \sigma_{II} \nu_2^2 - |\sigma_{III}| \nu_3^2 = \begin{cases} k^2 \\ -k^2 \end{cases}$$ в зависимост от

ориентацията на $\vec{\nu}$ (площадката в т. $P(\vec{\nu})$), при k^2 - ур-то е еднополосен хиперболоид, а при $-k^2$ - двуполосен хиперболоид. Двете повърхнини са разделени с общ асимптотичен конус с ур-е $\sigma_I \nu_1^2 + \sigma_{II} \nu_2^2 - \sigma_{III} \nu_3^2 = 0$
Ако нормалата към площадката в т. P пресича еднополосният хиперболоид, то $\sigma_N = \frac{k^2}{\nu^2} > 0$ т.е. опънно напрежение, при $\sigma_N = -\frac{k^2}{\nu^2} < 0$, т.е. натисково напрежение. Ако нормалата е по посока на асимптотичния конус, $\sigma_N = 0$. Тогава векторът на напрежение T лежи в равнината на площадката.


ξ_3
$-k^2$
k^2
k^2
O
ξ_2
ξ_1
$-k^2$