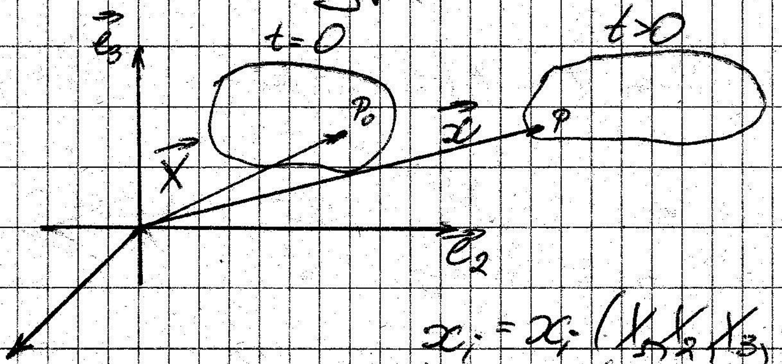
УМНС 12.03.15



$\vec x = (x_1, x_2, x_3)$

$\vec X = (X_1, X_2, X_3)$

$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i = 1,2,3$

$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1,2,3$

Изискваме само да са гладки

$$(d\vec x)^2 - (d\vec X)^2 = 2E_{ij}\, dX_i\, dX_j = 2e_{ij}\, dx_i\, dx_j \quad (**)$$

където

$E_{ij} := \frac{1}{2}\left(\frac{dx_k}{dX_i}\frac{dx_k}{dX_j} - \delta_{ij}\right)$ - компонентите

на Лагранжевият тензор на крайните деформации

$e_{ij} := \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{dX_k}{dx_i}\frac{dX_k}{dx_j}\right)$ - компонентите на

Ойлеровият тензор на крайните деформации

Ще покажем че E_{ij} и e_{ij} са тензори

Разглеждаме две координатни системи

$O\vec e_1 \vec e_2 \vec e_3$ и $O'\vec e_1' \vec e_2' \vec e_3'$. Озн. $\alpha_{ij} = \vec e_i' \cdot e_j = \cos(e_i', e_j)$ - директорен косинус. Тогава

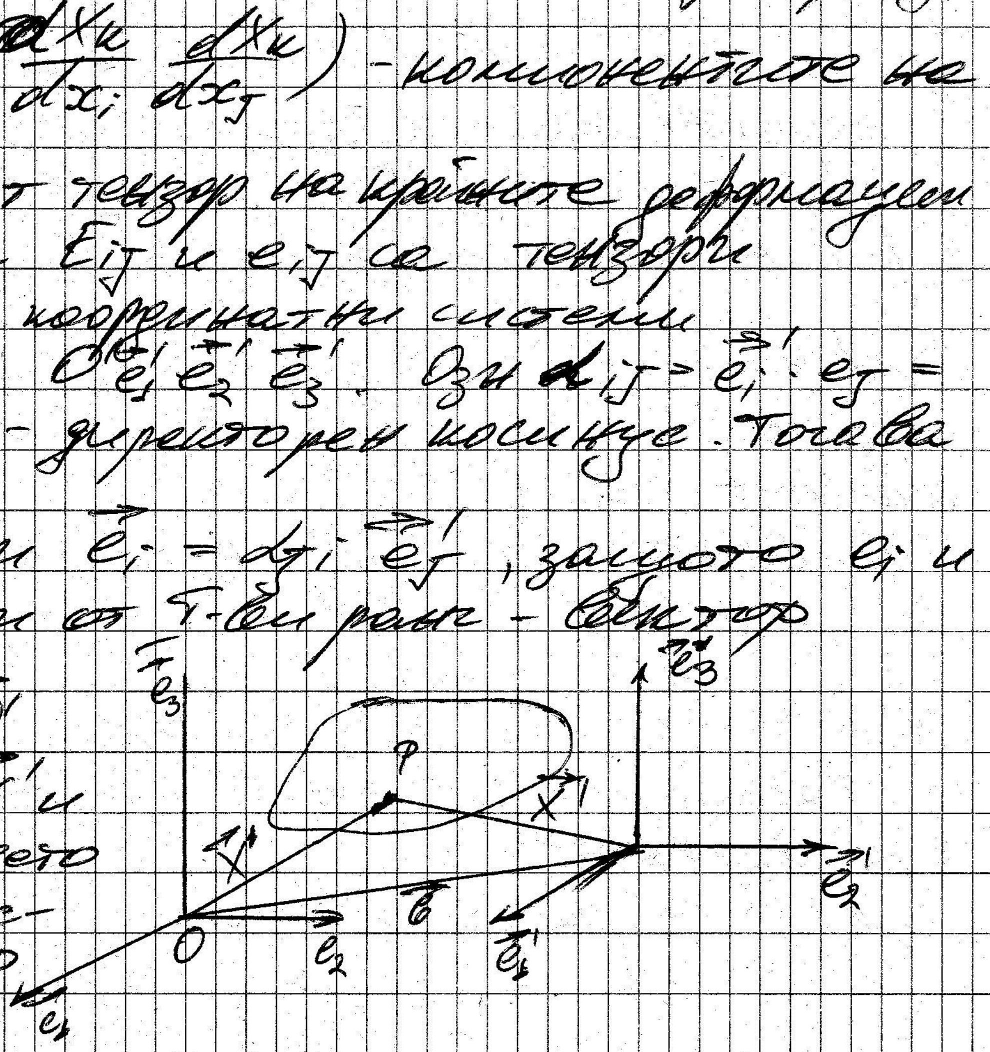
$\vec e_i' = \alpha_{ij} \vec e_j$ и $\vec e_i = \alpha_{ji} \vec e_j'$, защото e_i и e_j са тензори от 1-ви ранг - вектор

Нека $\vec b = b_i \vec e_i = \vec{OO'}$

Тогава $\vec X = \vec b + \vec X'$ и

$\vec x = \vec b + \vec x'$, където

$\vec X'$ и $\vec x'$ са радиус-векторите на P_0 и P



спрямо $O' \Rightarrow \vec{X} - \vec{b} = (X_i - b_i)\vec{e_i} = \vec{X'} =$

$\vec{X'_j}\vec{e'_j} = X'_j \alpha_{ji} e_i \Rightarrow X_i = b_i + X'_j \alpha_{ji}$ $\Big\}(*)$

Аналогично за $x_i = b_i + \alpha_{ji} x'_j$

Заместване $(*)$ в $(**)$ $\Rightarrow (dx)^2 - (dX)^2 =$
$2E_{ij}dX_i dX_j = 2E_{ij}\alpha_{ki} dX'_k \alpha_{ej} dX'_e =$

$2e_{ij}dx_i dx_j = 2e_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{ej}dx'_k dx'_e$
От друга страна $(dx)^2 - (dX)^2 =$
$= 2E'_{ij} dX'_i dX'_j = 2e'_{ke} dx'_k dx'_e$ където

$E'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx'_k}{\partial X'_i}\frac{dx'_k}{\partial X'_j} - \delta_{ij}\right)$ и $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_e}{\partial x_j}\right)$

Т.к. dx'_i и dX'_i са произволни то сравнявайки левите страни виждаме че
$E'_{ke} = \alpha_{ki}\alpha_{ej}E_{ij}$, $e'_{ke} = \alpha_{ki}\alpha_{ej}e_{ij} \Rightarrow$
E и e са тензори

Деформация - Разликата $(d\vec{x})^2 - (d\vec{X})^2$ е мярка за големината на деформация в околност на т. P_0. Т.к. dX_i и dx_i са произволни то НДУ тази разлика да е 0 е $E_{ij} = 0$, $e_{ij} = 0$

Нужно е обаче да изразиме Ойлеровите и Лагранжевите тензори с вектора на преместването
Дефинираме $u_i = x_i - X_i$ и получаваме

$$\frac{du_i}{dx_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad ; \quad \frac{du_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

и се наричат градиенти на преместването

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)\left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) - \delta_{ij}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cancel{\delta_{ji}} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k \partial u_k}{\partial x_i \partial x_j} - \cancel{\delta_{ij}}\right)$$

Аналогично за $x \Rightarrow e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k \partial u_k}{\partial X_i \partial X_j}\right)$

В теорията на малките деформации имаме

$\left|\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right| << 1$ и ние ще пренебрегваме произведение на такива градиенти. При наличие на самите градиенти –

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right), \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

това са тензорите на малките деформации

Нека сега докажем че при малки деформации имаме $\tilde{E}_{ij} = \tilde{e}_{ij}$

$x_k = x_k(X_1 X_2 X_3 t)$. Знаем също $dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i$

Заместване в $(d\vec{x})^2 - (d\vec{X})^2 = 2E_{ij}\, dX_i dX_j =$

$2e_{ij}\, dx_i dx_j =$

$2e_{mn} \frac{\partial x_m}{\partial X_i} dX_i \frac{\partial x_n}{\partial X_j} dX_j = 2e_{mn} \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_n}{\partial X_j} dX_i dX_j$

$$\Rightarrow E_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_m}{\partial X_j} e_{km} \Rightarrow$$

$$E_{ij} = \left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)\left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right.$$

$$\Rightarrow E_{ij} = \left(\delta_{ki}\delta_{mj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\delta_{mj} + \delta_{ki}\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right)$$

т.е. $E_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = e_{ij}$

Въвеждаме вектор на ротациите

Леви Чевита

$\vec{\omega} = \omega_i \vec{e}_i$ където $\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\omega_{kj}$

$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{u}$ където $\mathrm{rot}\,\vec{u} = \nabla\times\vec{u} =$

$$= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

Геометрична интерпретация на компонентите на тензорите на деформация. Два вида деформации и инварианти. При малки деформации $|e_{ij}| \ll 1$.

$$(dx)^2 - (dX)^2 = 2e_{ij}\,dx_i dx_j = 2E_{ij}\,dX_i dX_j = 2e_{ij}\,dX_i dX_j$$

$$(dx)^2 = (dX)^2 + 2e_{ij}\,dX_i dX_j = \delta_{ij}\,dX_i dX_j + 2e_{ij}\,dX_i dX_j =$$

$$(\delta_{ij} + 2e_{ij})\,dX_i dX_j \Rightarrow dx = \sqrt{(\delta_{ij} + 2e_{ij})\,dX_i dX_j} \approx \sqrt{\delta_{ij}\,dX_i dX_j}$$

Понеже $|e_{ij}| \ll 1$ и я игнорираме. Знаем също, че $dX = \sqrt{\delta_{ij}\,dX_i dX_j} \Rightarrow dx = dX$ при малки деформации