ТВ 25.02.15

Комбинаторика

Зад. Разпределят се k различни частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:

а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица

① ② ... ⓚ , $\underset{1\ 2\ \dots\ n}{|\,|\,|\dots|\,|}$, $k \le n$

$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = V_n^k$ - вариация

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

б) клетките могат да съдържат произволен брой частици

① ② ... ⓚ , $\underset{1\ 2\ \dots\ n}{|\,|\,|\dots|}$, $k \le n$

$n.n.n\dots n = n^k = \tilde{V}_n^k$ - вариация с повторения

Зад. Разпределят се k неразличими частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:

а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица

$\underbrace{0\,0\,0 \ldots 0}_{k}$ $\quad \underset{1\ 2 \quad\quad n}{| \, | \, | \ldots | \, |}$ $\quad k \leq n$

$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ - комбинация

в) клетките могат да съдържат произволен брой частици

$\tilde{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$ Излиза от това къде

можем да сложим разделителната черта

т.е. $\underset{\mathrm{I}\ \ \mathrm{II}\ \ \mathrm{III}}{|00|0|..0||}$. като за първата черта имаме

$k+1$ - варианта, за втората

черта имаме $k+2$ - варианта ...

до $(k+n-1)$ - варианта $\rightarrow$

$$\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)}{(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-\cancel{k})!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Комбинация с повторения

Зад. Десет души се нареждат в редица.
Колко са подрежданията, при които три
фиксирани лица се намират едно до друго
Реш.
(1)(2)(3) .. (10) $\Rightarrow$ (123)(4) .. (10) - т.е. 8! варианта
но 1,2,3 има 3! пермутации $\Rightarrow$ отг 8!.3!

Зад. Колко четирицифрени числа могат да се напишат от цифрите 1, 2, 3, 4, 5, ако

а) цифрите участват по веднъж

$$V_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120$$

б) допуска се повтаряне на цифрите

$$\tilde{V}_5^4 = 5^4$$

в) не се допуска повтаряне и числото е нечетно

1, 3, 5 - 3 - нечетни числа, заради ~~повторени~~ неповтарянето на цифри, получаваме вариации от 4 цифри с 3 вариации =>

Отг: $3 \cdot V_4^3 = 3 \cdot 4! = 3 \cdot 24$

Друг вариант. Знаем че общият брой на вариациите е 120 (от а)). Тогава

$$120 \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot 24$$

Зад. Група от 12 студенти трябва да изпрати чуждестранна делегация от четирима свои представители. По колко начина може да се избере състава, ако:

а) няма ограничения за участие в нея

$$C_{12}^{4} = \binom{12}{4}$$

б) Студентите А и В не трябва да участват заедно

(A)(B)(1)(2) .. (10). Разглеждаме 3-групи, при които първата е само с А, втората само с В и трета е нито с А нито с В. Тогава получаваме

само с А   само с В   без А и без В

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$$

в) Студентите С и D могат да участват само заедно

Тук разгл. 2 групи: 1-вата със С и D, а втората – без С и без D, т.е.

с С и D   без С и D

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{4}$$

Зад Пет различни топки се разпределят в три различни кутии A, B и C. Да се намери броя на всички различни разпределения, при които:

а) кутията А е празна

вариация с повторения ⇒

$\tilde{V}_2^5 = 2^5$ (остават 2 кутии и 5 топки

б) само кутията А е празна

2^5 са вариантите при А празна, но има още 2 варианта - единият при В празна, а другият при С празна ⇒

$$2^5 - 1 - 1 = 2^5 - 2$$

в) точно една кутия е празна

$2^5 - 2$ е когато само А е празна и тъй-като са 3 кутии ⇒ $3 \cdot (2^5 - 2)$

г) поне една кутия е празна

$\binom{3}{1}$ - една кутия е празна

$\binom{3}{2}$ - две кутии са празни ⇒

$$\binom{3}{1}(2^5-2) + \binom{3}{2} 1^5 = 3(2^5-2) + 3$$

д) Няма празна кутия. $\tilde{V}_3^5$ - всички варианти, от тях трябва да извадим тези случаи, при които има празна кутия, т.е.

$$\tilde{V}_3^5 - 3(2^5-2) - 3 = 3^5 - 3(2^5-2) - 3$$

Зад Нека Ω е мн-то от всички наредени n-торки с повторение на цифрите 1, 2, 3. Да се намери броят на елементите на Ω, при които

а) Започват с 1

$\Omega = \{1, m_2 \ldots m_n\}$, $m_i \in \{1, 2, 3\}$, $i = 2 \ldots n$

3^{n-1}

б) съдържат точно k-пъти цифрата 2

$\underset{1}{\_}\ \underset{2}{|2|} \ldots \underset{n}{|2|}$ $\qquad \binom{n}{k} 2^{n-k}$

където 2^{n-k} са останалата част от цифрите (купчинките съдържащи 1, 3)

в) съдържат точно k-пъти цифрата 1, при което започват и завършват с 1

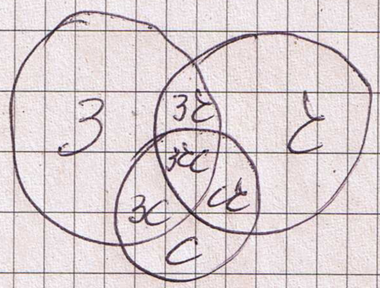
$|1| \ldots |1|$ $\qquad \binom{n}{k-2} 2^{n-k}$

г) са съставени от k_1 единици, k_2 двойки и k_3 тройки

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\underbrace{\binom{n-k_1-k_2}{k_3}}_{=k_3\ ((n = k_1+k_2+k_3))} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$$

$= \tilde{P}_n$ - пермутация с повторения

Зад. Всяка стена на всяко едно от сто кубчета е или червена, или синя, или зелена. Нека 80 кубчета имат поне една стена в червено, 85 кубчета поне една синя и 75 кубчета поне една зелена. Какъв е най-малкият брой кубчета, които имат стени от трите цвята



$$\left.\begin{array}{l}\text{З} + \text{ЗЧ} + \text{ЗЧС} + \text{ЗС} = 75 \\ \text{Ч} + \text{ЗЧ} + \text{ЧС} + \text{ЗЧС} = 80 \\ \text{С} + \text{СЧ} + \text{ЗС} + \text{ЗЧС} = 85\end{array}\right\} +$$

$$\text{З} + \text{Ч} + \text{С} + \text{ЗС} + \text{ЗЧ} + \text{ЧС} + \text{ЗЧС} = 100$$

$$-\left|\begin{array}{l}\text{З} + \text{Ч} + \text{С} + 2\text{ЗС} + 2\text{ЗЧ} + 2\text{ЧС} + 3\text{ЗЧС} = 240 \quad \Rightarrow \\ 2\text{З} + 2\text{Ч} + 2\text{С} + 2\text{ЗЧ} + 2\text{ЧС} + 2\text{ЗС} + 2\text{ЗЧС} = 200\end{array}\right.$$