ТВ 18.03.15

Зад. Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n различни адреса и изпратила писмата. Да се определи вероятността

а) всеки да получи своето писмо

Нека $P(A) = \{$всеки получава своето писмо$\}$

$$P(A) = \frac{1}{n!}$$

б) точно $n-1$ човека да получат своето писмо

$$P(B) = \frac{0}{n!} = 0$$

в) нито едно лице да не получи своето писмо

$\underset{i=1..n}{A_i} = \{i$-тия човек получава своето писмо$\}$

$$P(\bar{A_1}\bar{A_2}..\bar{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1 A_2 .. A_n}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 .. \cup A_n)$$

$$= 1 - \left[\sum_i P(A_i) - \sum_i P(A_i A_j) .. + (-1)^{n+1} P(A_i .. A_n)\right] =$$

$$= 1 - \Big[\underbrace{n \cdot \frac{(n-1)!}{n!}}_{1} - \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n!}{(n-2)!\,2!}} \frac{(n-2)!}{n!} .. (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\Big] =$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + .. + (-1)^n \frac{1}{n!} \underset{n\to\infty}{\approx} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Зад. В урна има 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки. От урната последователно се вадят топки. Да се определи вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена ако:

а) след всяко изваждане топката се връща обратно в урната

Нека A_i, $i=1 \ldots \infty$ = {на i-тия опит вадим бяла топка}

B_i = {на i-тия опит вадим зелена топка}

C_i = {на i-тия опит вадим червена топка}

A = {бяла преди зелена}

$$P(A_i) = \frac{5}{20}, \quad P(B_i) = \frac{8}{20}, \quad P(C_i) = \frac{7}{20}$$

$$P(A) = P(A_1 \cup C_1 A_2 \cup C_1 C_2 A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(C_1 A_2) + \ldots$$

$$= \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\frac{5}{20} + \ldots = \frac{5}{20}\sum \left(\frac{7}{20}\right)^k = \frac{5}{20}\left(\frac{1}{1-\frac{7}{20}}\right) = \frac{5}{13}$$

б) Извадените топки не се връщат

$$P(A) = P(A_1 \cup C_1 A_2 \cup \ldots \cup C_1 C_2 \ldots C_7 A_8) =$$

$$= P(A_1) + P(C_1 A_2) + \ldots + P(C_1 C_2 \ldots C_7 A_8) =$$

$$= \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\frac{5}{19} + \ldots + \frac{7}{20}\frac{6}{19}\ldots\frac{1}{14}\frac{5}{13} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{13}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}$$

Зад. Даден е правоъгълен тетраедър, на който едната страна е боядисана в бяло, втората в зелено, третата в червено, а на четвъртата има и от трите цвята. При хвърляне на тетраедъра вероятността да падне на която е ~~падне~~ на коя да е от страните е една и съща. Нека А е събитието върху което е паднал на бял цвят. Аналогично се дефинират В и С за зеления и червения цвят. Независими ли са А, В и С две по две? А в съвкупност?

$$P(A) = \frac{2}{4}, \quad P(B) = \frac{2}{4}, \quad P(C) = \frac{2}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4}, \quad P(AC) = \frac{1}{4}, \quad P(BC) = \frac{1}{4}$$ където

$P(AB) = P(A)P(B) \Rightarrow P(AB) = \frac{2}{4}\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$ т.е. В и А те са независими две по две. Аналогично се доказва до $P(AC)$ и $P(BC)$

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \neq \frac{1}{4} = \frac{2}{4}\frac{2}{4}\frac{2}{4} = \frac{1}{8}$ т.е. не

те не са независими в съвкупност

Зад. Вероятността, че в резултат на четири независими опита събитието А ще настъпи поне веднъж е равна на $\frac{1}{2}$. Да се определи вероятността за настъпване на А при един опит, ако вероятността за всеки опит е една и съща

A_1, A_2, A_3, A_4 – независими, равни т.е.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = p$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1/2$$

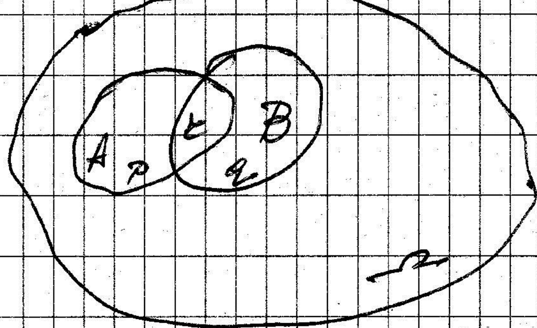
$$1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) P(\bar{A}_4)$$

$$P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i) = 1 - p \Rightarrow 1 - (1-p)^4 = 1/2 \quad \text{т.е.}$$

$$(1-p)^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - p = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 - \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = p$$

Зад. Известни са вероятностите на събитията A, B и AB. Да се определят $P(A\bar{B})$ и $P(\bar{B}/\bar{A})$

Нека $P(A) = p$, $P(B) = q$, $P(AB) = r$

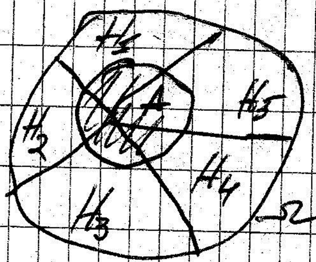


$$P(A\bar{B}) = p - r$$

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{1 - p - q + r}{1 - p}$$

Зад. Дадени са две партиди изделия от 12 и 10 броя съответно, като във всяко има по едно дефектно. По случаен начин се избира изделие от първата партида и се прехвърля във втората, след което избираме случайно изделие от втората партида. Да се определи вероятността то да е дефектно

Ф-ла Разделяне на хипотези



$H_i \quad i=\overline{1,n}$

Пълна група от събития е

$$\begin{cases} H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega \\ H_i \underset{i \neq j}{\cap} H_j = \emptyset \end{cases}$$

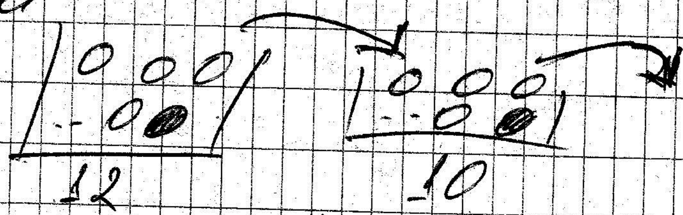
A и B са несъвместими, ако $A \cap B = \emptyset$

Ф-ла за пълната вероятност

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(AH_1 \cup AH_2 \cup \ldots \cup AH_n) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(AH_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A/H_k)P(H_k) = P(A)$$

Реш.



H_1 = {изваждане недефектен от първата урна}
H_2 = {изваждане дефектен от първата урна}

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) =$$

$$\frac{1}{11}\frac{11}{12} + \frac{2}{11}\frac{1}{12} = \frac{13}{132}$$

(5)

Зад. Имаме три нормални зара и един, на който върху всичките стени има шестици. По случаен начин избираме един от тези четири зара и го отделяме, а след това хвърляме останалите три. Да се определи вероятността да се паднат

а) три шестици

Нека H_1 = {отделяме зара с шестиците}

H_2 = {отделяме нормален зар}

A = {падат се три шестици}

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) =$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{19}{6^3 4}$$

б) различни цифри, B = {различни цифри}

$$P(B|H_1) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5.4}{6^2}, \quad P(B|H_2) = \frac{V_5^2}{6^2} = \frac{5.4}{6^2}$$

в) последователни цифри, C = {последователни цифри}

$$P(C|H_1) = \frac{4.3!}{6^3}, \quad P(C|H_2) = \frac{2!}{6^2}$$