

ТВ 8.06.15

Зад Нека времето за сикане на автобусе 34 е експоненциално разпределено със средно 6 минути. Студент отива до ФМУ с автобусе 34 и в света има една случайната величина u_1 е отношението на времето, което студентът прекарва на първата спирка, към общото време за сикане на 34 в света по този начин. Параметрите разпределението на u_1

Реш

$u_1 \rightarrow$ времето за сикане на първата спирка

$u_2 \rightarrow$ времето за сикане на втората спирка

$$u_1 = \frac{u_2}{u_1 + u_2}, \quad u_1 \in Ex(\frac{1}{6}), \quad u_2 \in Ex(\frac{1}{6})$$

$$f_{u_1, u_2}(y_1, y_2) = ?$$

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = \frac{u_2}{u_1 + u_2} \\ u_2 = u_1 + u_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = y_2 y_1 \\ x_2 = y_2 - y_2 y_1 \end{array} \right.$$

$$J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1 - y_1 \end{vmatrix} = y_2, \quad f_{u_1, u_2}(x_1, x_2) = f_{u_1}(x_1) f_{u_2}(x_2) = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1 + x_2)}, \quad \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$f_{u_1, u_2}(y_1, y_2) = f_{u_1, u_2}(y_1 y_2, y_2 - y_1 y_2) \cdot y_2 = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(y_1 y_2 + y_2 - y_1 y_2)}, \quad \begin{array}{l} y_1 y_2 \geq 0, y_2 - y_1 y_2 \geq 0 \\ y_1 y_2 < 0, y_2 - y_1 y_2 < 0 \end{array}$$

$$f_{u_1}(y_1) = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y_2} y_2 dy_2, \quad y_1 \in [0, 1]$$

Зад Нека случайните величини $u_1, u_2 \in Ex(\lambda)$ са независими. Да се намери максималната на случайната величина:

a) $u_1 = \max(u_1, u_2)$

$$f_{u_1, u_2}(x_1, x_2) = f_{u_1}(x_1) f_{u_2}(x_2) = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1 + x_2)}, \quad \begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 < 0, x_2 < 0 \end{array}$$

$$u_{y_1} = \max(k_1, k_2) \rightarrow f_{u_{y_1}}(y_1) = ?$$

$$F_{u_{y_1}}(y_1) = P(u_{y_1} < y_1) = P(\max(k_1, k_2) < y_1) = P(k_1 < y_1 \cap k_2 < y_1) =$$

$$P(k_1 < y_1)P(k_2 < y_1) = F_{k_1}(y_1)F_{k_2}(y_1) = (F_{k_1}(y_1))^2 = \begin{cases} (1 - e^{-2\lambda y_1})^2, & y_1 \geq 0 \\ 0, & y_1 < 0 \end{cases}$$

$$f_{u_{y_1}}(y_1) = \frac{dF_{u_{y_1}}(x)}{dx} = \begin{cases} 2(1 - e^{-2\lambda x})(2\lambda e^{-2\lambda x}), & y_1 \geq 0 \\ 0, & y_1 < 0 \end{cases}$$

$$b) u_{y_2} = \min(k_1, k_2)$$

$$F_{u_{y_2}}(y_2) = P(\min(k_1, k_2) < y_2) = 1 - P(\min(k_1, k_2) \geq y_2) =$$

$$1 - P(k_1 \geq y_2 \cap k_2 \geq y_2) = 1 - P(k_1 \geq y_2)P(k_2 \geq y_2) =$$

$$1 - [1 - P(k_1 < y_2)][1 - P(k_2 < y_2)] = 1 - [F_{k_1}(y_2)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda y_2}, & y_2 \geq 0 \\ 0, & y_2 < 0 \end{cases}$$

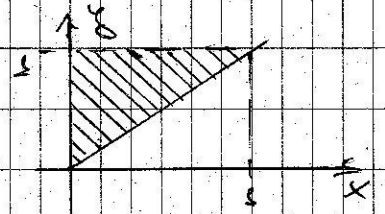
$$f_{u_{y_2}}(y_2) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda y_2}, & y_2 \geq 0 \\ 0, & y_2 < 0 \end{cases}$$

Заг. Електронно устройство за предупреждение от крадици автоматично променя осветлението в дома. То е така настроено, че в разстояние на един час, в случайни моменти, точно веднъж ще включи и изключи лампите. Нека съвместната плътност на си в. k, y (време на включване, време на изключване) е $f_{k,y}(x,y) = cxy$, $0 < x < y < 1$. Да се определи:

a) кощата часта с, така че $f_{k,y}(x,y)$ да е интегралност.

Реш.

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{в ир. сл.} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\int_0^y cxy dx \right) dy = \int_0^1 \frac{cy^3}{2} dy = \frac{c}{2} \frac{1}{4} = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 8$$

$$\Rightarrow f_{xy}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{в ир. сл.} \end{cases}$$

б) маргинальные плотности и функции

Реш

$$f_x(x) = \int_x^1 8xy dy = 8x \int_x^1 y dy = \begin{cases} 4x(1-x^2), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

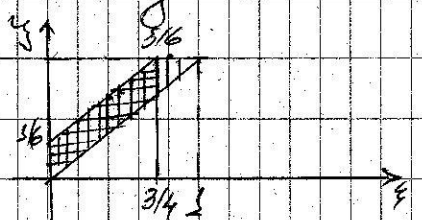
$$f_y(y) = \int_0^y 8xy dx = 8y \frac{x^2}{2} \Big|_0^y = \begin{cases} 4y^3, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}$$

в) лампите се работят зачалежи 45 минути и се светят и
малко от 10 минути

Реш

$$D \left(\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, y - \frac{1}{4} < \frac{1}{6} \right),$$

$$D: \begin{cases} x < 3/4 \\ y - x < 1/6 \end{cases}$$



$$\iint_D 8xy dx dy = \int_0^{3/4} \left(\int_x^{x+1/6} 8xy dy \right) dx = 4 \int_0^{3/4} x \left[(x+1/6)^2 - x^2 \right] dx$$

2) средното време на светене, ако лампите са били
зачалежи 15 минути

$$E\left(y - \frac{1}{4} \mid \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\right) = E\left(y \mid \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\right) - E\left(\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\right) = E\left(y \mid x = \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}$$

$$f_{y|x}\left(y \mid x = \frac{1}{4}\right) = \frac{8xy}{4x(1-x^2)} \Big|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{2y}{15/16} = \begin{cases} \frac{32y}{15}, & y \in [1/4, 1] \\ 0, & y \notin [1/4, 1] \end{cases}$$

3)

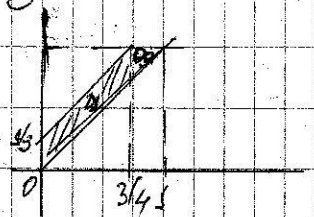
$$E(\eta_2 | \xi = 1/4) = \int_{1/4}^1 y \frac{32}{15} y dy = \frac{32}{15} \frac{y^3}{3} \Big|_{1/4}^1 = \frac{7}{10} \Rightarrow$$

$$E(\eta_2 - \xi | \xi = 1/4) = \frac{7}{10} - 1/4 = 9/20 = 27 \text{ микрон}$$

г) Вероятность получить за светом по-прежнему 20 микрон.
Реш

$$P(\eta_2 - \xi < 1/3) = \iint_{D_1} f_{\eta_2}(xy) dx dy + \iint_{D_2} f_{\eta_2}(xy) dx dy =$$

$$\int_0^{1/4} \left(\int_x^{x+1/3} 8xy dy \right) dx + \int_{1/4}^{1/3} \left(\int_x^{1/3} 8xy dy \right) dx, \text{ где}$$



е) коэффициент корреляции

Реш

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D_\xi} \sqrt{D_\eta}} = \frac{E_{\xi\eta} - E_\xi E_\eta}{\sqrt{D_\xi} \sqrt{D_\eta}}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

$$D_\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2$$

$$f_{\eta_2}(\eta) = \begin{cases} 4\eta^3, & \eta \in [0, 1] \\ 0, & \eta \notin [0, 1] \end{cases}$$

$$E_{\xi\eta} = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \cdot 8xy dx dy$$