ТВ 03.06.15

Зад. Размерът на пъпешите е нормално разпределена случайна величина с очакване 25 см и дисперсия 36 см. Пъпешите по-малки от 20 см са трето качество, а останалите се разделят на две равни по брой групи, като по-големите са първо качество, а по-малките второ. Каква част от пъпешите са трето качество? Колко голям трябва да е един пъпеш за да бъде първо качество?

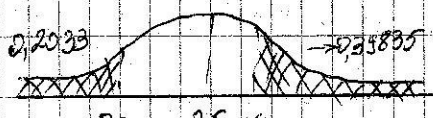
Реш.

$\xi \in N(25, 36)$

$<20 \to$ трето качество

$20 < x \to$ второ

$\geq x \to$ първо



$$P(\xi < 20) = P\left(\frac{\xi - 25}{\sqrt{36}} < \frac{20-25}{\sqrt{36}}\right) = P\left(\eta < -\frac{5}{6}\right) =$$

$$= P\left(\eta > \frac{5}{6}\right) = 1 - P\left(\eta < \frac{5}{6}\right) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033 \text{ III кач}$$

$$P(\eta < y) = 1 - 0{,}39835 = 0{,}60165 \approx 0{,}2$$

където $\frac{x-25}{6} = y$ $\quad P(\xi < x) = P\left(\frac{\xi - 25}{6} < \frac{x-25}{6}\right) \Rightarrow$

$$x = 6y + 25 = 6 \cdot 0{,}26 + 25 = 26{,}56 \text{ - I кач}$$

т.е. при $20 \leq \xi \leq 26{,}56$ - II кач

Зад. Нека ξ е оценката, която студент получава на изпит по „Теория на вероятностите". Нека предположим, че $\xi \in N(\mu, \sigma^2)$, където $\mu = 4, \sigma = 0{,}64$

Да се намери

а) $P(2 \leq \xi < 6)$

б) $P(3 \leq \xi < 6)$

в) $P(3 \leq \xi < 6 \mid 2 \leq \xi < 6)$

Реш. $\xi \in N(4, 0{,}64)$

а) $P(2 \le \xi < 6) = P\left(\frac{2-4}{0{,}8} \le \frac{\xi-4}{0{,}8} < \frac{6-4}{0{,}8}\right) = P(-2{,}5 \le \eta < 2{,}5) =$

$= P(\eta < 2{,}5) - P(\eta < -2{,}5) = P(\eta < 2{,}5) - [1 - P(\eta < 2{,}5)] =$

$= 2P(\eta < 2{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}9938 - 1 = 0{,}9876$

б) $P(3 \le \xi < 6) = P\left(\frac{3-4}{0{,}8} \le \frac{\xi-4}{0{,}8} < \frac{6-4}{0{,}8}\right) = P\left(-\frac{10}{8} \le \eta < \frac{2}{0{,}8}\right) =$

$= P(-1{,}25 \le \eta < 2{,}5) = P(\eta < 2{,}5) - P(\eta < -1{,}25) =$

$P(\eta < 2{,}5) - [1 - P(\eta < 1{,}25)] = P(\eta < 2{,}5) + P(\eta < 1{,}25) - 1 =$

$= 0{,}9938 + 0{,}8944 - 1 = 0{,}8882$

в) $P(3 \le \xi < 6 \mid 2 \le \xi < 6) = \frac{P(3 \le \xi < 6)}{P(2 \le \xi < 6)} = \frac{0{,}8882}{0{,}9876} = 0{,}89935$

Зад. Нека случайната величина $\xi \in Ex(\lambda)$ е броят точки, който студент получава на контролно по „Теория на вероятностите"

а) намерете λ, за което $P(0 \le \xi < 4) = 0{,}9999$

Реш. $P(0 \le \xi < 4) = 0{,}9999 = P(\xi < 4) - P(\xi < 0) = P(\xi < 4) - 0 =$

$P(\xi < 4) = F_\xi(4) = 1 - e^{-4\lambda} \Rightarrow 1 - e^{-4\lambda} = 0{,}9999$ т.е.

$e^{-4\lambda} = \frac{1}{10000} \Rightarrow e^{-4\lambda} = 10^{-4} \Rightarrow -4\lambda = -4\ln 10 \Rightarrow \lambda = \ln 10$

б) за намереното λ, пресметнете $P(1 \le \xi < 4)$

Реш.

$P(1 \le \xi < 4) = F_\xi(4) - F_\xi(1) = 1 - e^{-4\lambda} - 1 + e^{-\lambda} = e^{-\lambda} - e^{-4\lambda} =$

$= e^{-\ln 10} - e^{-4\ln 10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10000} \approx 10\%$

Зад. Нека случайна величина $\xi \in Ex(\lambda)$. Да се намерят плътностите на следните случайни величини, като използвате свойствата?

~~η~~ ξ, η → сл. вел. , η = g(ξ)

$f_\xi(x)$ → известност на плътността на ξ

$f_\eta(y) = ?$, $y = g(x)$, $x = g^{-1}(y) = h(y)$

$$J = \left|\frac{\partial h(y)}{\partial y}\right| \Rightarrow f_\eta(y) = f_\xi(h(y)).|J|$$

а) $\eta = -\xi$

Реш. $\Rightarrow y = -x \Rightarrow x = -y$; $J = \left(\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) = -1$

$$f_\eta(y) = f_\xi(-y)|-1| = \begin{cases} \lambda e^{\lambda y}, & y \le 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases}$$

б) $\eta = 2\xi - 1$

Реш. $\Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$, $J = \frac{1}{2}$

$$f_\eta(y) = f_\xi\left(\frac{y+1}{2}\right).\frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda\frac{y+1}{2}}, & y \ge -1 \\ 0, & y < -1 \end{cases}$$

в) $\eta = \sqrt{\xi}$

Реш. $\Rightarrow y = \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow x = y^2$ $J = 2y$

$$f_\eta(y) = f_\xi(y^2).2y = \begin{cases} 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

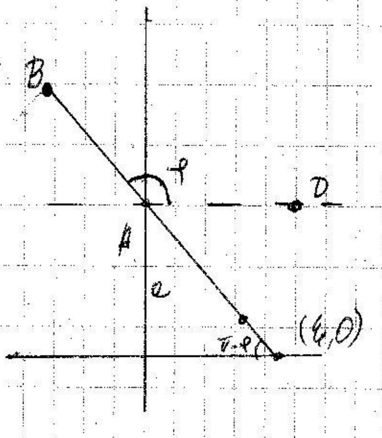
г) $\eta = \xi^a$, $a > 0$

Реш. $\Rightarrow y = \cancel{x}^a > 0 \Rightarrow x = y^{\frac{1}{a}}$, $J = \frac{1}{a} y^{\frac{1}{a}-1}$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} y^{\frac{1}{a}-1} \lambda e^{-\lambda y^{\frac{1}{a}}}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Зад. Случайна т. B е равномерно разпределена в/у окръжност с център т. A(0, a) и радиус a. Нека C(ξ, 0) е пресечната точка на правата AB с абсцисната ос. Да се намери плътността на ξ.

Реш.



$$\varphi = \sphericalangle DAB, \quad \varphi \in [0,\pi]$$

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in [0,\pi] \\ 0, & x \notin [0,\pi] \end{cases}$$

$$tg(\pi-\varphi) = \frac{a}{\xi} \Rightarrow \xi = a\,cotg(\pi-\varphi) = -a\,cotg\,\varphi$$

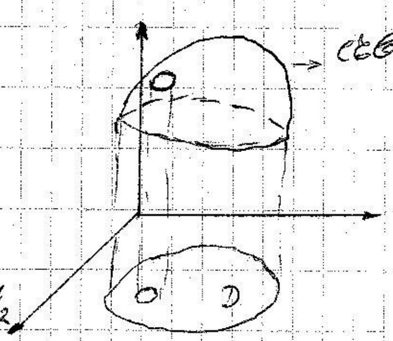
$$f_\xi(y) = ?, \quad y = -a\,cotg\,x$$

$$x = arccotg\left(-\frac{y}{a}\right), \quad J = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$f_\xi(y) = f_\varphi(x) = \frac{1}{a}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2+y^2}}, \quad y \in (-\infty,+\infty)$$

Ф-ии. Решета

ξ_1, ξ_2 - сл. вел.



→ съвместна плътност $f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)$

$$\iint f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1$$

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)\,dx_2$$

$$f_{\xi_2}(x_2) = \int f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)\,dx_1, \quad P(\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2) = F_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)$$

съвместна ф-я на разпределение

$$\frac{\partial^2 F_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)$$

Ако $\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2 \Longleftrightarrow f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2) = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2), \; F_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)$

Решета

$$f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2) \to \text{известно}$$

$$\begin{cases} \eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2) \\ \eta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$

$$y_1 = g_1(x_1x_2) \Longrightarrow x_1 = h_1(y_1y_2)$$
$$y_2 = g_2(x_1x_2) \Longrightarrow x_2 = h_2(y_1y_2)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

$$f_{\eta_1\eta_2}(y_1,y_2) = f_{\xi_1\xi_2}\big(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)\big)|J|$$

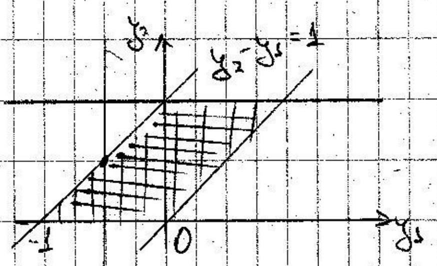
Зад. Нека случайните величини $\xi_1,\xi_2 \in U(0,1)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2$

Реш.

$\xi_1,\xi_2 \in U(0,1)$, $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2 \Rightarrow f_{\xi_1}(x_1) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ 0, & x\notin[0,1] \end{cases}$

измисл. $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = y_2 - y_1 \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & x_1\in[0,1],\ x_2\in[0,1] \\ 0, & x_1\notin[0,1],\ x_2\notin[0,1] \end{cases}$; $f_{\eta_1\eta_2}(y_1,y_2) = \begin{cases} 1, & y_2\in[0,1],\ 0\le y_2-y_1\le 1 \\ 0, & y_2\notin[0,1],\ 0\nleq y_2-y_1\nleq 1 \end{cases}$ защото са независими



$$f_{\eta_1}(y_1) = \begin{cases} \int_0^{1+y_1} 1\,dy_2, & -1\le y_1\le 0 \\ \int_{y_1}^{1} 1\,dy_2, & 0\le y_1\le 1 \end{cases}$$