МО 2.06.15

Транспортна задача

складове $A_1, A_2 \dots A_m$

количество $a_1, a_2 \dots a_m$ — Баланс $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

потребители $B_1, B_2 \dots B_n$

количество $b_1, b_2 \dots b_n$

транспортни разходи $c_{ij} : A_i \to B_j \ (\forall A_i, B_j)$

Търсим минимални разходи за транспорт на продуктите от склад до потребител

$$x = [x_{ij}]_{m \times n}; \quad z(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$P \left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1 \dots m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1 \dots n \\ \forall x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

Св-во 1. НДУ задачата да има решение е $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Нека $x \in P$. Тогава

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = S > 0$$

Разгл. $\bar{x} = [\bar{x}_{ij}]_{m \times n}, \quad \bar{x}_{ij} = \frac{a_i b_j}{S} > 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \frac{a_i}{\cancel{S}} \cancel{\sum_{j=1}^{n} b_j} = a_i; \quad \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \frac{b_j}{\cancel{S}} \cancel{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j \Rightarrow P \neq \emptyset$$

Нека $x \in P$

$$|z(x)| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| x_{ij} \leq M \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| = const, \text{ за}$$

$\forall x_{ij} \leq \max(a_i, b_j) = M \Rightarrow$ допустимото мн-во е огр

т.е. $\exists$ опт реш

Св2 $\operatorname{rang}(A) = m+n-1$ за $A:(m+n)\times m.n$

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. ЛЗ $\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(A) \le m+n-1$

стълб x_{ij} : $A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to i \\ \\ \to m+j \\ \\ \\ \end{matrix}$, $A_{ij} \in R^{m+n}$

$$A' = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & & 1 & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & & 0 & 0 & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ 0 & 0 & & & \vdots & & 1 \end{bmatrix} \\ A_{mn}\,A_{2n} \;\cdots\; A_{mn}\,A_{1j} \;\cdots\; A_{1n} \end{array}$$

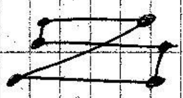
Квадратна матр: $(m+n-1)$
$\det(A') = 1 \neq 0 \Rightarrow$
$\operatorname{rang}(A) = m+n-1$

Транспортни таблици

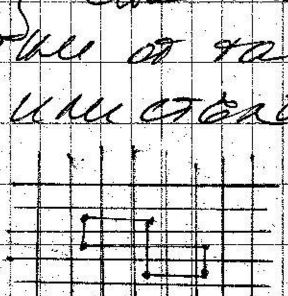
	B_1	...	B_j	...	B_n	a_i
A_1						a_1
⋮						⋮
A_i			c_{ij}			a_i
⋮						⋮
A_m						a_m
b_j	b_1	...	b_j	...	b_n	

клетка (i,j): x_{ij}, c_{ij}, A_{ij}

Деф Затворена начупена линия ще наричаме линия съставена от отсечки, където краят на една отсечка е начало на друга отсечка

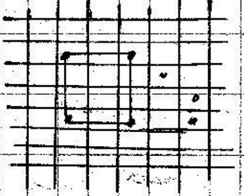


Деф Цикъл в транспортната таблица ще наричаме затворена начупена линия на която върховете лежат в клетки от таблицата, отсечките лежат в ред или стълб на таблицата



$(i\,j)(i_1 j_1)(i_1 j_1) \ldots (i_s j_s)(i_s\,j)$

Деф Един набор от клетки в транспортната таблица наричаме цикличен, ако $\exists$ поне един цикъл, на който всички върхове са в клетки от набора, иначе го наричаме ацикличен



Св3 Една съвкупност от вектор стълбове на матрицата A ще бъде ЛНЗ $\Leftrightarrow$ съответният и набор от клетки в транспортната таблица е ацикличен

Нека $\{A_{ij}\}$ - ЛНЗ, $\{(i,j)\}$ - ацикличен?

Допускаме противното т.е. $\{(i,j)\}$ - цикличен

$(i,j)(i,j_1)(i_1,j_1) \dots (i_s,j_s)(i_s,j)$. Оттук имаме

$$A_{ij} - A_{ij_1} + A_{i_1j_1} - \dots + A_{i_sj_s} - A_{i_sj} = 0$$

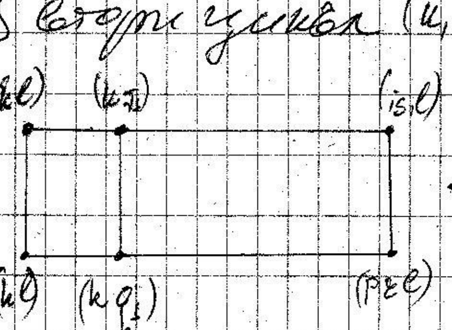
Св 4 $\exists!$ цикъл, който свързва произволна празна клетка за даден връх от транспортната задача с пълните клетки

$\bar{x}: m+n-1$, (k,l) - празна клетка

1-вият цикъл $(k,l)(k,j_1)(i_1,j_1) \dots (i_s,j_s)(i_s,l)$

Допускаме че $\exists$ втори цикъл $(k,l)(k,q_1)(p_1,q_1) - (p_t,q_t)(p_t,l)$

$\Longrightarrow$



$\Rightarrow$ ↯ 2 цикъла

Намиране на начален връх

Зад

3+4-1=6

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	100 [3]	[5]	[7]	[11]	~~100~~ начало
A_2	50 [1]	80 [4]	[6]	[3]	~~130~~ ~~80~~
A_3	[5]	40 [8]	80 [12]	50 [7]	~~170~~ ~~130~~ ~~50~~
b_j	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	50	400 \ 400

Северо-Западен начин (метод) за намиране на начален връх

за СЗ не използваме цените

$$\min z = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 11x_{14} + x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} +$$
$$+ 5x_{31} + 8x_{32} + 12x_{33} + 7x_{34}$$

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	20	10		~~30~~ ~~10~~
A_2		0	40	~~40~~
A_3			10	~~10~~
b_j	~~20~~	~~10~~ 0!!	~~50~~ ~~10~~	80 \ 80

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 130$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50$$
$$\forall x_{ij} \geq 0$$

Метод на минималният елемент за намиране на начален връх

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 [3]	80 [5]	[7]	[11]	~~100~~ ~~80~~
A_2	130 [1!]	[4]	[6]	[3]	~~130~~
A_3	[5]	40 [8]	80 [12]	50 [7]	~~170~~ ~~120~~ 80
b_j	~~150~~ 20	~~120~~ 40	80	50	400 \ 400