По лекции 24.03.15

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, ранг $A = m$, $m < n$

$\bar{x} \in P = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$, $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N^{=0})$

$$A\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{x}_j$$

$R^n \ni d \neq 0$ е посока $\Leftrightarrow \exists x_0 \in P$ т.е. $\forall \lambda \geq 0, x_0 + \lambda d \in P$ за произволна точка $x_1 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x_1 \in P \\ \mu \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + \mu d \in P \Rightarrow (1-\frac{1}{k})x_1 + \frac{1}{k}(x_0 + \mu k d)$

линейна комбинация

Нека $x \in P = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$ е произволна точка. Тогава може да има най-много $\binom{n}{m}$ върхове във P

$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i + d$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, $i \in I$

$A(x_0 + \lambda d) = b$ за $d_i \geq 0$, $Ad = b$. Защо?

Нека $Ad_1 = 0, d_1 \geq 0$ $\quad \alpha \in [0, 1]$

$Ad_2 = 0, d_2 \geq 0$ Тогава

$$A(\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) = \alpha A d_1 + (1-\alpha) A d_2 = 0, \text{ т.е.}$$

$$\alpha d_1 + (1-\alpha) d_2 \geq 0 \quad \square$$

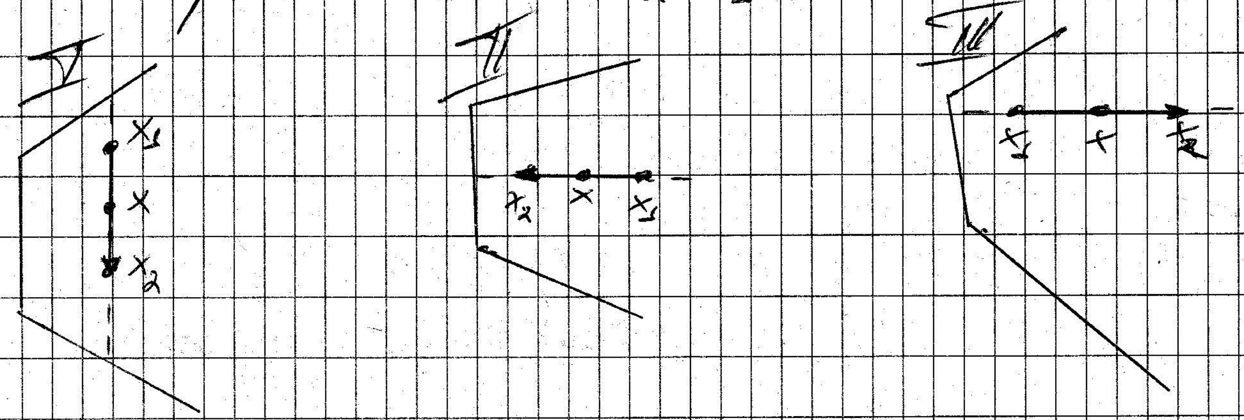
Нека $x \in P$

1) 0^+ координати. Можем да представим $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i + d$ където d е нулевият вектор. Тогава нулата е връх, защото ако $x_1 \in P \ni x_2$, $x_1 \neq x_2$, $0 = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$, $1 > \alpha > 0$

2) Допускаме k^+ координати, т.е. x има k^+ координати

$x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$, $x_1 \in P \ni x_2$, $x_1 \neq x_2$, $\alpha \in (0,1)$

има z е крайно и $z = x_2 - x_1 \neq 0$. Тогава



I - z не е посока, щото z има $\pm$ координати и z е крайно

ме $\left|\begin{array}{l} x + \lambda z, \ \lambda \geq 0 \Rightarrow \text{не е } \infty \\ x - \mu z, \ \mu \geq 0 \Rightarrow \text{не е } \infty \end{array}\right.$

Нека $x_i > 0$. Тогава

$$x_i + \lambda z_i \geq 0 \quad \begin{cases} z_i = 0, \ OK \\ z_i > 0, \ OK \\ z_i < 0 \Rightarrow \lambda_i \leq -\frac{x_i}{z_i} > 0 \end{cases}$$

Нека $\bar{\lambda} = \min\left\{-\frac{x_i}{z_i}, x_i > 0, z_i < 0\right\} \Rightarrow \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$

$$\bar{x} = x + \bar{\lambda} z \rightarrow k^+ \text{ координати}$$

сега $x - \mu z$, $\mu \geq 0$

$$x_i - \mu z_i \geq 0 \quad \begin{cases} z_i = 0, \ OK \\ z_i < 0, \ OK \\ z_i > 0 \Rightarrow \mu_i \leq \frac{x_i}{z_i} \Rightarrow \bar{\mu} = \min\left\{\frac{x_i}{z_i}, x_i > 0, z_i > 0\right\} \end{cases}$$

$\bar{x} = x - \bar{\mu} z$ с най-много k^+ координати

$$x = \frac{1}{\bar\lambda + \bar\mu}\left[\bar\lambda \bar x_1 + \bar\mu \bar x_2\right] \text{ за } \begin{array}{l} \bar x_1 = x - \bar\mu \bar z \quad / \cdot \bar\lambda \\ \bar x_2 = x + \bar\lambda \bar z \quad / \cdot \bar\mu \end{array}$$

Тогава

$$\bar x_1 = \sum_{i\in I}{}' \lambda_i^1 \hat x_i + d_1, \quad \bar x_2 = \sum_{i\in I}{}' \lambda_i^2 \hat x_i + d_2, \quad \sum_{i\in I}{}' \lambda_i^1 = 1$$

$$\lambda_i^1 \geq 0, \quad \sum_{i\in I}{}' \lambda_i^2 = 1, \quad \lambda_i^2 \geq 0, \quad i \in I$$

Имаме че $\bar x = \frac{\bar\lambda}{\bar\lambda + \bar\mu}\left[\sum_{i\in I}{}' \lambda_i^1 \hat x_i + d_1\right] + \frac{\bar\mu}{\bar\lambda + \bar\mu}\left[\sum_{i\in I}{}' \lambda_i^2 \hat x_i + d_2\right]$

$$= \sum_{i\in I}{}' \left[\frac{\bar\lambda}{\bar\lambda + \bar\mu}\lambda_i^1 + \frac{\bar\mu}{\bar\lambda + \bar\mu}\lambda_i^2\right]\hat x_i + \underbrace{\frac{\bar\lambda}{\bar\lambda + \bar\mu} d_1 + \frac{\bar\mu}{\bar\lambda + \bar\mu} d_2}_{} = d$$

имаме

$$\sum_{i\in I}{}' \left(\frac{\bar\lambda}{\bar\lambda + \bar\mu}\lambda_i^1 + \frac{\bar\mu}{\bar\lambda + \bar\mu}\lambda_i^2\right) = \frac{\bar\lambda}{\bar\lambda + \bar\mu}\sum_{i\in I}{}' \lambda_i^1 + \frac{\bar\mu}{\bar\lambda + \bar\mu}\sum_{i\in I}{}' \lambda_i^2 =$$

$$\frac{\bar\lambda}{\bar\lambda + \bar\mu}\cdot 1 + \frac{\bar\mu}{\bar\lambda + \bar\mu}\cdot 1 = \frac{\bar\lambda + \bar\mu}{\bar\lambda + \bar\mu} = 1 \quad //$$