МЛ Хр. Ганчев 07.10.14

Азбука наричаме всяко (непразно) мн-во (от символи). Дума над азбуката Σ наричаме всяка крайна редица от елементи на Σ. Ако w_1, w_2 са думи на Σ, то тяхната конкатенация $w_1 w_2$ е дума над Σ. Множеството от думите над Σ се означава с Σ^*. Език над Σ наричаме всяко $L \subseteq \Sigma^*$

Формална система

3 компонента

1. Език на формалната система: Дефинира формулите на формалната сист
2. Аксиоми: Формули (някои) на формалната система
3. Правила за извод: Правилата за извод са от вида $\frac{A_1, \dots, A_n}{A}$ където $A_1, \dots, A_n, A$ са

~~формални~~ формули. Формулите на чертата наричаме предпоставки на правилото (реда не е от значение), а A - заключение

Правилата са елементарни логически следствия

Деф Нека F е формална система. Дефинираме Th-те на F чрез следното индуктивно правило:

① всяка аксиома на F е Th на F

② Ако $A_1, \dots, A_n$ са Th на F и $\frac{A_1, \dots A_n}{A}$ е правило на F, то A е Th на F

Ще пишем $\vdash_F A$ вместо A Th на F

①

Деф. Ще казваме че редицата $A_0, A_1 \ldots A_n$ (от ф-ли на F) е доказателство на A_n в F, ако всяка ф-ла от редицата е или аксиома, или се получава от някое от правилата на F и някои ~~от~~ предходните формули

Забележка

а) Ако $A_0, A_1, \ldots, A_m$ е доказателство, то за всяко $k \le m$, $A_0, A_1 \ldots A_k$ е доказателство

б) Ако $A_0, A_1 \ldots A_m$ и $B_0, B_1 \ldots B_s$ са доказателства, то $A_0, A_1 \ldots A_m, B_0, B_1 \ldots B_s$ също е доказателство

Тв:

Нека F е формална система. Тогава $\vdash_F A \Leftrightarrow$ A има доказателство в F

$\rightarrow$) Нека $\vdash_F A$. Ще докажем, че A има док-во с индукция по получаването на A

(1) A е аксиома. Тогава редицата A е док

(2) A се получава от правилото $\dfrac{A_1 \ldots A_n}{A}$ на F и теоремите $A_1 \ldots A_n$. Съгласно индукционното предположение A_i има доказателство за $1 \le i \le n$. Нека $A_{i0}, A_{i1}, \ldots A_{ik_i}$ е доказателство. Нека A_i (т.е. A_i съвпада с A_{ik_i}) за $1 \le i \le n$. Тогава $A_{10}, A_{11} \ldots A_{1k_1}, A_{20}, A_{21}, \ldots A_{2k_2} \ldots A_{nk_n}$ е доказателство

$\leftarrow$ Нека A има доказателство $A_0, A_1 \ldots A_m$ в F. Ще докажем, че A е теорема с индукция по получаването

1) $m = 0$. Тогава док-вото на A е редицата A и следователно A е аксиома. Сл. $\vdash_F A$

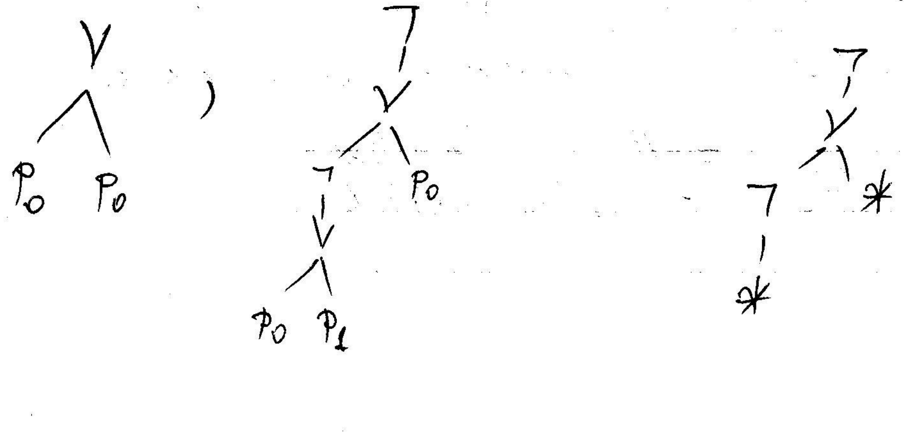
2)

2) $m>0$. Т.к. редицата $A_0, A_1 \dots A_m$ е док-во, редиците A_0; A_0A_1; $A_0A_1A_2$ ... $A_0A_1 \dots A_{m-1}$ са док-ва оттук и индукционното предположение
$A_0, A_1 \dots A_m$ са Th-и на F

1сл) A_m е аксиома $\Rightarrow \vdash_F A$
2сл) A_m не е аксиома $\Rightarrow$ A_m се получава от $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_k}$ за някои $i_1, i_2 \dots i_k < m$ чрез правилото $\frac{A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_k}}{A_m}$, но $A_{i_1} \dots A_{i_k}$ са Th-и $\Rightarrow$

$$\vdash_F A_m$$

Съждително смятане (съждителна логика)
1. Език: 1.1. Съждителни променливи: $P_0, P_1, \dots P_n, \dots$
1.2. Логически връзки: $\neg$ (отрицание), $\vee$ (дизюнкция)
1.3. Ф-ли на съждителното смятане - ф-лите на съждителното смятане са думи над азбуката $\neg, \vee, P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ дефинирани чрез следната индуктивна схема:
(1) $\forall$ ~~съждение~~ съждителна променлива е ф-ла
(2) Ако A е формула, то $\neg A$ е ф-ла
(3) Ако A и B са ф-ли то $\vee AB$ е ф-ла
Пример
P_0; P_5; $\vee P_0P_0$, $\neg\vee\neg\vee P_0P_1P_0$ — формули
$\neg\vee\neg$, $P_0\neg P_1$, $\vee P_0P_1P_0$ — не са формули



Th: Нека A е формула на съждителното смятане (бележим PC). В сила е точно едно от следните
1) A е съждителна променлива
2) $\exists!$ формула B, т.ч. A е $\neg B$
3) $\exists!$ формули B и C, т.ч. A е $\vee BC$.

Съкращения
1) Ще пишем $(A \vee B)$ вместо $\vee AB$
2) Ще пишем $(A \& B)$ вместо $\neg(\neg A \vee \neg B)$
3) Ще пишем $(A \to B)$ вместо $(\neg A \vee B)$
4) Ще пишем $(A \leftrightarrow B)$ вместо $((A \to B) \& (B \to A))$
5) Ще изпускаме записа на най-външните скоби
6) Ще пишем $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ вместо $A_1 \vee (A_2 \vee (\ldots (A_{n-1} \vee A_n)) \ldots)$
7) Ще пишем $A_1 \& A_2 \ldots \& A_n$ вместо $A_1 \& (A_2 \& (\ldots (A_{n-1} \& A_n)) \ldots)$
8) Ще пишем $A_1 \to A_2 \ldots \to A_n$ вместо $A_1 \to (A_2 \to (\ldots (A_{n-1} \to A_n)) \ldots)$

Зад. Да се различие съкращението
1) $P_0 \& P_0$, $(P_0 \& P_0)$, $\neg(\neg P_0 \vee \neg P_0)$, $\neg \vee \neg P_0 \neg P_1$
2) $(P_0 \vee P_1) \vee P_0$, $((P_0 \vee P_1) \vee P_0)$, $\vee (P_0 \vee P_1) P_0$, $\vee \vee P_0 P_1 P_0$
3) $P_0 \vee P_1 \vee P_0$, $P_0 \vee (P_1 \vee P_0)$, $(P_0 \vee (P_1 \vee P_0))$, $\vee P_0 (P_1 \vee P_0)$, $\vee P_0 \vee P_1 P_0$
4) $P_2 \leftrightarrow P_2$, $((P_2 \to P_2) \& (P_2 \to P_2))$ ... $\neg \vee \neg \vee \neg P_2 P_2 \neg \vee \neg P_2 \neg P_2$
5) $(P_0 \vee P_1) \to P_0$, $\vee P_0 P_1 \to P_0$, $\vee \neg \vee P_0 P_1 P_0$
6) $P_0 \to (P_0 \vee P_1)$, $P_0 \to \vee P_0 P_1$, $\vee \neg P_0 \vee P_0 P_1$
7) $P_0 \to P_1 \to P_2$ ... $\vee \neg P_0 \vee \neg P_1 P_2$
8) $(P_0 \to P_1) \to P_2$ ... $\vee \neg \vee \neg P_0 P_1 P_2$
9) $(P_0 \& P_1) \to P_0$, $\vee \neg (P_0 \& P_1) P_0$, $\vee \neg \neg \vee \neg P_0 \neg P_1 P_0$

Аксиоми за $\forall$ ф-ла A — $\neg A \vee A$ е аксиома

Правила $(R_1)\ \dfrac{A}{B \vee A}$, $(R_2)\ \dfrac{A \vee A}{A}$, $(R_3)\ \dfrac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$,

$(R_4)\ \dfrac{A \vee B;\ \neg A \vee C}{B \vee C}$