

KA

30.10.14

2.6. Да се намери холоморфна ф-я $f(z) = u + iv$ за която е) $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$

Реш

$$u_x = -e^{-x}(x \sin y - y \cos y) + e^{-x} \sin y = e^{-x}[(1-x) \sin y + y \cos y]$$

$$u_y = e^{-x}(x \cos y - \cos y + y \sin y) = e^{-x}[(x-1) \cos y + y \sin y]$$

$$\begin{cases} u_x = u_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_y = e^{-x}[(1-x) \sin y + y \cos y] & (1) \\ v_x = e^{-x}[(1-x) \cos y - y \sin y] & (2) \end{cases}$$

При фиксирано x интегрираме (1) по y :

$$v = \int e^{-x}[(1-x) \sin y + y \cos y] dy = e^{-x}[(x-1) \cos y] + \int y \cos y dy$$

$$\int y \cos y dy = \int y d \sin y = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y + C \Rightarrow$$

$$e^{-x}[(x-1) \cos y + y \sin y + \cos y] + f(x) =$$

$$e^{-x}[x \cos y + y \sin y] + f(x) \quad (3)$$

$$\text{от (3)} \Rightarrow v_x = e^{-x}(x \cos y + y \sin y) + e^{-x} \cos y + f'(x) =$$

$$e^{-x}[(1-x) \cos y - y \sin y] + f'(x) \quad (4)$$

$$\text{от (2) и (4)} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{const}$$

$$\text{от (3)} \Rightarrow v = e^{-x}(x \cos y + y \sin y) + C$$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= u + iv = e^{-x}(x \sin y - y \cos y) + i e^{-x}(x \cos y + y \sin y) \\
 + iC &= e^{-x}[\sin y(x + iy) - i \cos y(x + iy)] + iC = 0 \\
 e^{-x}[(x + iy)(\sin y - i \cos y)] + iC &= z e^{-z} i (\cos y - i \sin y) \\
 + iC &= i z e^{-x} e^{-iy} + iC = i z e^{-z} + iC
 \end{aligned}$$

Задача за контролата (2,4,2,5,2,6)

2.6 e) Да се намери холоморфна функция $f(z) = u + iv$ за която $v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, $f(2) = 0$

Реш

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 v_y &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \\
 &= \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$v_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (1)$$

При фиксирано x
интегриране (2) по y
(за удобство) $\triangleq$

$$u_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad (2)$$

$$u = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dy = \int x dy^2 + x^2 =$$

$$= -\frac{x}{x^2+y^2} + f(x) \quad (3)$$

$$u_x = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\frac{-x^2-y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + f'(x) \quad (4)$$

от (1) и (4) $\Rightarrow f'(x) = 0$ т.е. $f(x) = \text{const}$

от (3) $\Rightarrow u = \frac{-x}{x^2+y^2} + C$

$$f(z) = \frac{-x}{x^2+y^2} + i; \quad z = x+iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|z|^2 = x^2+y^2 \Rightarrow$$

$$= \frac{-(x-iy)}{|z|^2} + C = -\frac{z}{z^2} + C = -\frac{1}{z} + C$$

$$f(z) = 0 = -\frac{1}{z} + C \Rightarrow C = \frac{1}{z}$$

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}$$

Опр 1. Немо $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е област и $U: D \rightarrow \mathbb{R}$
 казваме че u е хармонична в D ако
 $u \in C^2(D)$ и $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в D (Лемас)

Th 1. Ако $D \subseteq \mathbb{C}$ е област в комплексната равнина и $f = u + iv$ е холоморфна в D то u и v са хармонични в D

Def 2. Една област $D \subseteq \mathbb{C}$ се нарича едносвързана ако заедно с всяка затворена не-самопресичаща се (Жорданова) крива свързана и нейната вътрешност (грубо казано D е едносвързана ако в нея няма дупки)

Th 2. Ако u е хармонична в едносвързана област $D \subseteq \mathbb{C}$, то $\exists$ холоморфна в D функция f , на която u е реална част. (а следователно f и холоморфна в D функция, на която u е имажинерна част: $f + i\bar{f}$)

Заг 2.7. Нека $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е двукратно гладка функция. Да се намери холоморфна функция $f = u + iv$ за която а)
 $u(xy) = f(xy)$; б) $u(xy) = f(x^2 - y^2)$

Реш

Ще предположим че u е дефинирана в едносвързана област. Тогава изследването на u да е реална част на холоморфна функция е равносилно на u да е хармонична. Функцията f ще определим от u да е хармонична. Нека $u(xy) = f(t(xy))$ където $t(xy)$ е двукратно гладка функция на x и y . а) $t(xy) = xy$, б) $t(xy) = x^2 - y^2$

$$u_x = f' t_x, \quad u_{xx} = f'' t_x^2 + f' t_{xx}$$

$$u_y = f' t_y, \quad u_{yy} = f'' t_y^2 + f' t_{yy}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow (t_x^2 + t_y^2) f'' + (t_{xx} + t_{yy}) f' = 0$$

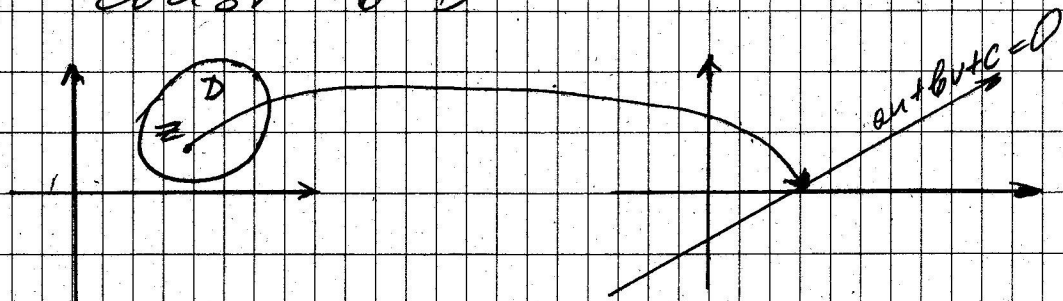
d) $t(x,y) = xy, \quad t_x = y, \quad t_y = x, \quad t_{xx} = t_{yy} = 0 \Rightarrow$

$$(x^2 + y^2) f'' = 0 \Rightarrow f'' = 0 \Rightarrow f(t) = At + B$$

$A, B \in \mathbb{R}$ - т.е. $u(x,y) = At + B$. Откуда
 Непосредственно разбейте на как в 2.6

$$\begin{cases} u_x = u_y \\ u_y = -u_x \end{cases}$$

2.8 a) На и покаже че ако $f(z) = u + iv$ е
 голоморфна в област D и стойността
 ѝ лежат на правата $au + bv + c = 0$ то
 f - const в D



Имаме $au(x,y) + bv(x,y) + c = 0$ за $(x,y) \in D$

$$\text{оттук } \begin{cases} au_x + bu_x = 0 \\ au_y + bu_y = 0 \end{cases} \text{ в } D \quad (\text{При фиксиране точка } (x,y) \in D)$$

Това е линейна хомогенна система, която има
 ненулево решение $(a,b) \Rightarrow \det = 0$

Следовательно $u_x v_y - v_x u_y = 0$ б.д. ①

40 / $u_x = v_y$ б.д. ②
 $u_y = -v_x$ б.д. ③ Тогда ① стабе

$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \text{ б.д. и } v_y^2 + v_x^2 = 0 \text{ б.д.}$$

Сл. $u_x = 0 = u_y$ б.д. и $v_x = v_y = 0$ б.д.

Сл. $u \equiv \text{const}$ б.д. и $v \equiv \text{const}$ б.д. $\Rightarrow$
 $f = u + iv \equiv \text{const}$ б.д. ④