

КА

27.11.14

Елементарни функции

При елементарни функции ще разбирате функциите-константи, функциите e^z , $\log z$, z^2 , $\sin z$, $\cos z$ и функциите получени от тях чрез четирите аритметични операции $+$, $-$, $\cdot$, $:$, и чрез образуване на композиция от функции, и на обратна функция

① $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$; e^z е холоморфна в $\mathbb{C}$

$$(e^z)' = e^z \quad z \in \mathbb{C}; \quad e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$e^{z_1 z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

ако $z = x + iy$ то $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$
 $|e^z| = e^x$ и $\arg e^z = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 $e^z = e^{z+2\pi i}$, $z \in \mathbb{C}$

② функциите $\sin z$ и $\cos z$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z$$

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi$$

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

} Ф-ии на Ойлер

Всички тригонометрични функции валидни въ
 $\mathbb{R}$ и валидни и в комплексната
 равнина. $\sin z$ и $\cos z$ приемат всички
 комплексни стойности, в частност не са
 ограничени

③ $\log z$

Нека $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогава

$$e^w = z \Leftrightarrow w = \log z$$

$$\log z = \ln|z| + i \arg z, \quad z \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

$\log z$ е многозначна функция

④ z^α

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

z^α е многозначна функция

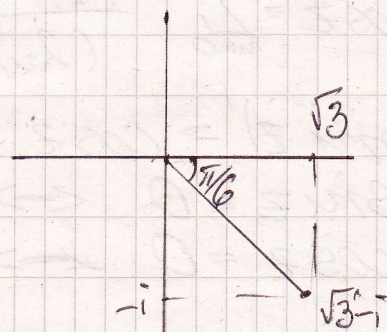
Заг 5.10 Не се пресметнат всички стойности на:

$$\log(1-i), \log(\sqrt{3}-i), \log\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 1^{i\sqrt{2}}, i^{-i}, (1-i)^{i\sqrt{2}}$$

$$\log(\sqrt{3}-i) = \ln|\sqrt{3}-i| + i \arg(\sqrt{3}-i)$$

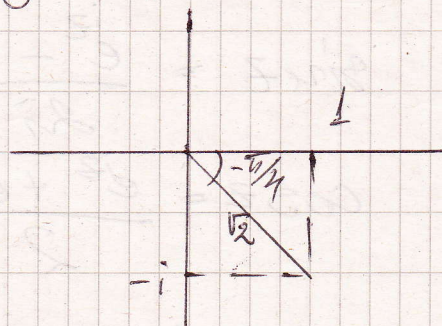
$$|\sqrt{3}-i| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$(1-i)^{i\sqrt{2}} = e^{i\sqrt{2} \log(1-i)} = e^{i\sqrt{2}(\ln|1-i| + i \arg(1-i))}$$

$$= e^{i\sqrt{2}(\ln\sqrt{2} + i(-\pi/4 + 2k\pi))}$$



Заг 5.5 Тригонометрично уравнение

но се реши уравнението

g) $\cos z + \sqrt{3} \sin z = 1$ (1)

Понатамне $t = e^{iz}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{t - \frac{1}{t}}{2i} = \frac{t^2 - 1}{2it}$$

$$\frac{t^2 + 1}{2} + \sqrt{3} \frac{t^2 - 1}{2it} = 1 \Leftrightarrow$$

$$i(t^2 + 1) + \sqrt{3}(t^2 - 1) = 2it \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{3} + i)t^2 - 2it + i - \sqrt{3} = 0$$

$$D = b^2 - ac = (-i)^2 - (i + \sqrt{3})(i - \sqrt{3}) = -1 + 1 + 3 = 3$$

$$t_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} \cdot \frac{i - \sqrt{3}}{i - \sqrt{3}} = \frac{(i - \sqrt{3})^2}{4} = \frac{-2 - i2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{or } t = e^{iz} \Leftrightarrow e^{iz} = 1 \quad (2) \text{ или } e^{iz} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

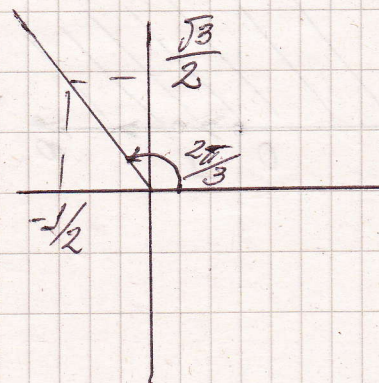
$$(2) \Leftrightarrow iz = \log 1 \Leftrightarrow iz = \ln|1| + i \arg 1 \Leftrightarrow$$

$$iz = i2k\pi \Leftrightarrow z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \Leftrightarrow iz = \log\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow iz = \ln\left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| + i \arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow iz = \ln 1 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ т.е.}$$

$$z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$



5.5,3) $\sin^3 z + \cos^3 z = 1 \quad (2)$

(2) $\Leftrightarrow \sin^3 z + \cos^3 z = \sin^2 z + \cos^2 z \Leftrightarrow$

$\sin^2 z (\sin z - 1) + \cos^2 z (\cos z - 1) = 0 \Leftrightarrow$

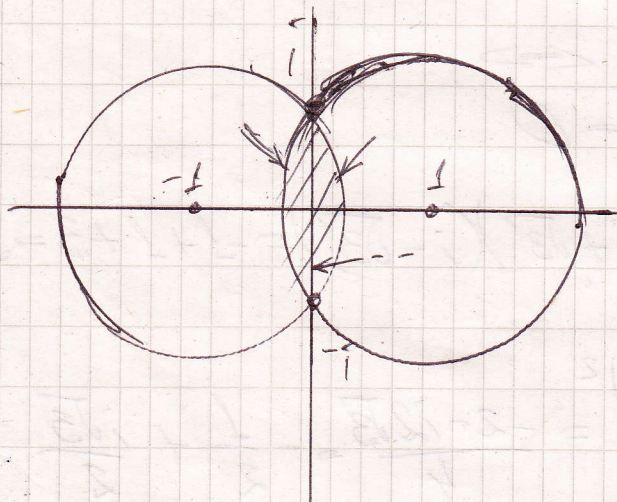
$(1 - \cos z)(1 + \cos z)(\sin z - 1) + (1 - \sin z)(1 + \sin z)(\cos z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos z)(\sin z - 1)(\sin z + \cos z + 2) = 0$

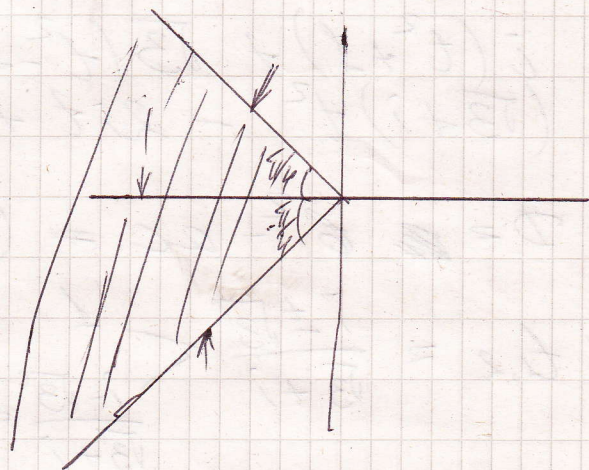
$\Leftrightarrow \cos z = 1$ или $\sin z = 1$ или $\sin z + \cos z + 2 = 0$

Трите уравнения се решават с полагането $t = e^{iz}$

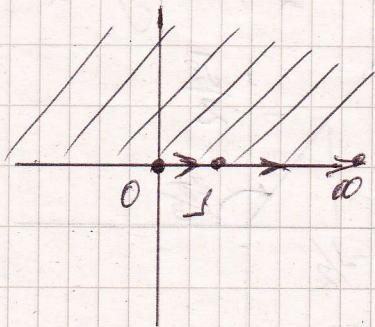
3.21 *) Да се намери образът на $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$ чрез ЛМФ $w = \frac{z-i}{z+i}$



$w = \frac{z-i}{z+i}$

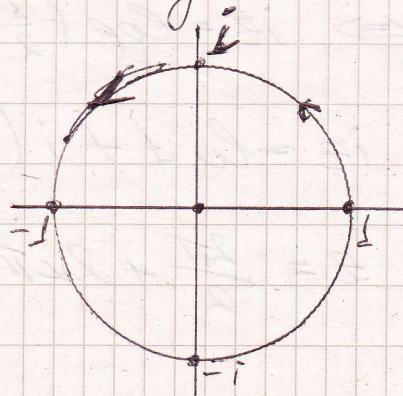


3.22 б) Да се намери ЛМФ $w(z)$, която изобразява горната полуправина $\text{Im } z > 0$ в единичния кръг $|w| < 1$



$w(z)$

$0 \Rightarrow 1$
 $1 \Rightarrow i$
 $\infty \Rightarrow -1$



$$(w, z, i, -1) = (z, 0, 1, \infty)$$

$$\frac{i-w}{i-1} = \frac{1-w}{1-1} = \frac{1-z}{1} = \frac{\infty-z}{\infty-0}$$