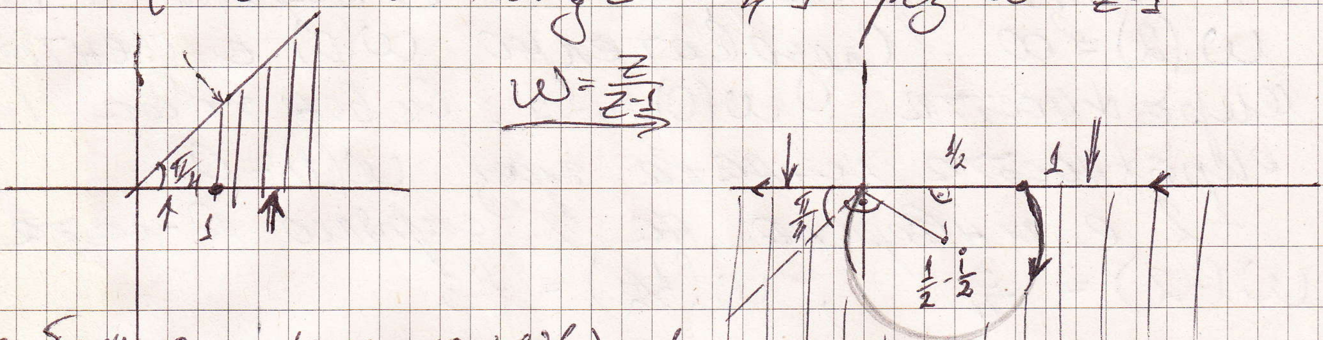
KA 24.11.14

(8.21) г) Да се намери образът на $\{z\in\mathbb{C} : 0<\arg z<\frac{\pi}{4}\}$ чрез $w=\frac{z}{z-1}$



Особената точка на $w(z)$ е 1

$w(0)=0$. Понеже $w(z)$ е с реални коефициенти тя изобразява $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Лъчът $\overrightarrow{[0,+\infty)}$ ще се изобрази в част от $\mathbb{R}$ с граница $w(0)=0$ и $w(\infty)=1$, и съдържаща $w(1)=\infty$.

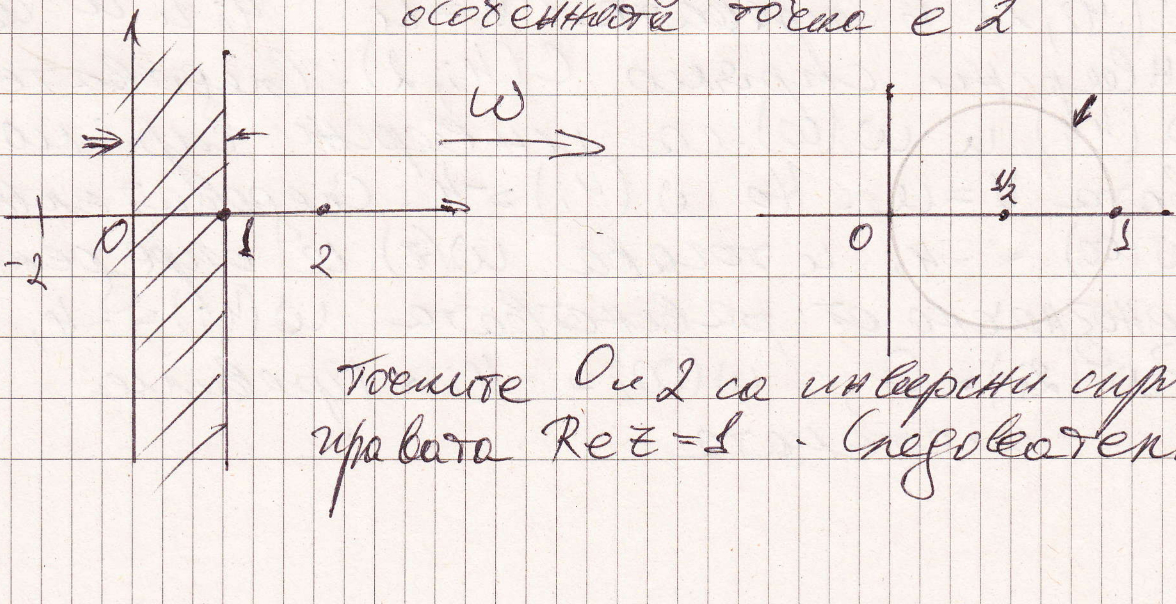
Следователно $\overrightarrow{[0,+\infty)}$ се изобразява в $\overrightarrow{[0,-\infty)}\cup\overrightarrow{[1,+\infty)}$. ---> се изобразява в дъга

Лъчът $\arg z=\pi/4$ се изобразява в дъга от окръжност с граница $w(0)=0$, $w(\infty)=1$ и сключваща в $w(0)=0$ ъгъл $\pi/4$ спрямо $\overrightarrow{[0,-\infty)}$

Накрая от принципа на съответствие на границите намираме образа на областта

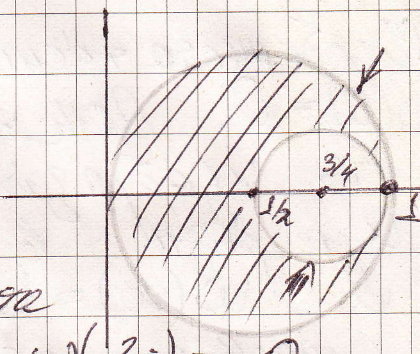
д) $\{z\in\mathbb{C} : 0<\operatorname{Re} z<1\}$ чрез $w=\frac{z-1}{z-2}$

особената точка е 2

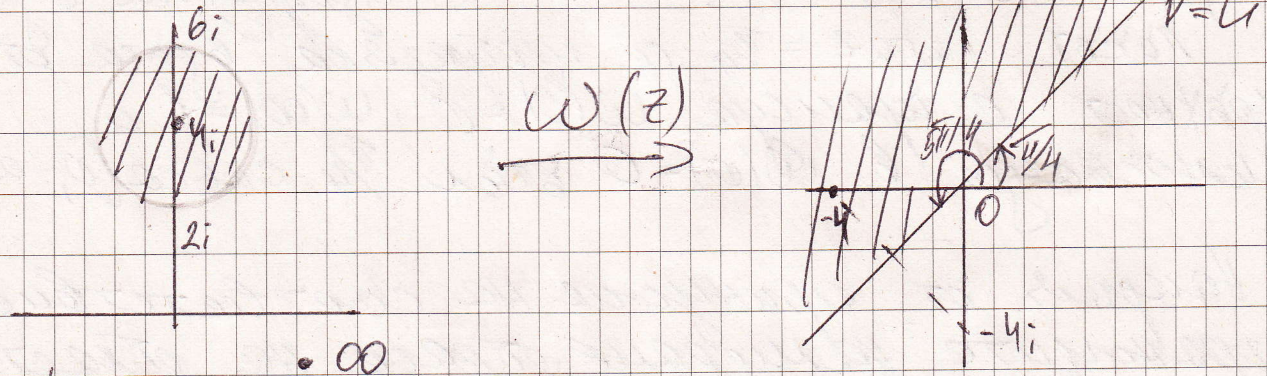


Точките 0 и 2 са инверсни спрямо правата $\operatorname{Re} z=1$. Следователно

$\omega(0)$ и $\omega(2)$ са инверсни спрямо образа на тази права, която е окръжност, но $\omega(2) = \infty$. Следователно $\omega(0)$ е център на окръжността. $\omega(0) = 1/2$. Освен това окръжността минава през $\omega(1) = 0$
-2 е инверсна на 2 спрямо 0-лата
$\omega(-2) = \frac{3}{4}$, $\omega(1/2) = -1/3$



(3.22) Да се намери ДЛФ $w(z)$, която изобразява
в) кръгът $K(4i;2)$ в полуравнината $\pi/4 < \arg \omega < \frac{5\pi}{4}$ т.е. $\omega(4i) = -4$, $\omega(2i) = 0$.



Нека ДЛФ $\omega(z)$ е решение на задачата. Тогава $\omega(z)$ изобразява окръжността $C(4i,2)$ в правата $v=u$. $4i$ и ∞ са инверсни спрямо $C(4i,2)$. Следователно $\omega(4i)$ и $\omega(\infty)$ са инверсни спрямо правата $v=u$. Но $\omega(4i) = -4$. Следователно $\omega(\infty) = -4i$ и тогава $\omega(z)$ се определя еднозначно от равенствата $\omega(4i) = -4$, $\omega(2i) = 0$, $\omega(\infty) = -4i$. Правим системата

$$(w, -4, 0, -4i) = (z, 4i, 2i, \infty) \Rightarrow$$

$$\frac{0-w}{0-(-4)} : \frac{-4i-w}{-4i-(-4)} = \frac{2i-z}{2i-4i} : \underbrace{\frac{\infty - z}{\infty - 4i}}_{1} \Rightarrow$$

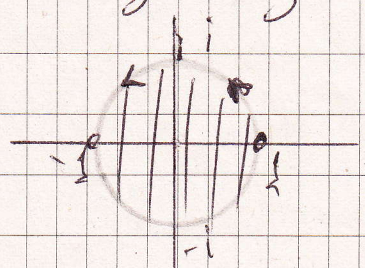
$$\frac{-w}{4} \cdot \frac{4-4i}{-4i-w} = \frac{2i-z}{2i-4i} \Rightarrow \frac{w(1-i)}{4i+w} = \frac{z-2i}{2i}$$

$$w(1-i)2i = (z-2i)(4i-w) \Rightarrow$$

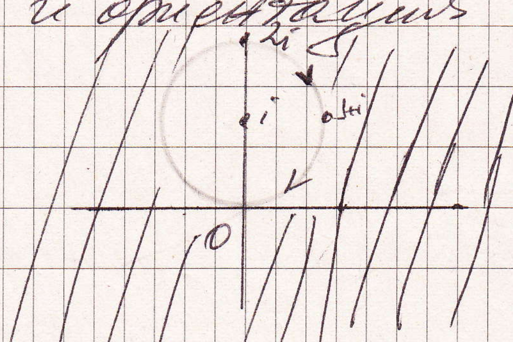
$$w(2i+2) = (z-2i)(4i-w) \Rightarrow \underline{w = 4i\,\frac{z-2i}{2+4i-z}}$$

Ще проверим че намерената $w(z)$ е решение на задачата. От определението на $w(z) \Rightarrow w(4i) = -4$, $w(2i) = 0$. Понеже особената точка $2+4i$ на $w(z)$ лежи на окръжността $C(4i, 2)$ то тази окръжност се изобразява в права ℓ, ℓ минава през точката $w(2i) = 0$ и освен това точките $w(4i) = -4$ и $w(\infty) = -4i$ са симетрични спрямо ℓ. Следователно ℓ е правата $v = u$. $w(z)$ изобразява кръгът $K(4i, 2)$ в тази от двете полуравнини спрямо ℓ, която съдържа $w(4i) = -4$ т.е. в полуравнината $\pi/4 < \arg w < 5\pi/4$

Я единичният кръг $|z|<1$ в областта $|w-i|>1$ използваме 3 точки и ориентация



$w(z)$



$i \to 1+i$
$1 \to 2i$
$-1 \to 0$

Нека $\omega(z)$ е единствената ДЛФ за която $\omega(1)=2i$, $\omega(i)=1+i$, $\omega(-1)=0$. Тя се определя от равенството $(\omega, 2i, 1+i, 0) = (z, 1, i, -1)$

$\omega(z)$ очевидно изобразява окръжност $|z|=1$ в окръжност $|\omega-i|=1$. Освен това областта $|z|<1$ която остава отляво при ориентацията определена от $1, i, -1$ се изобразява в областта, която също остава отляво на окръжността $|\omega-i|=1$ при ориентацията, определена от $2i, 1+i, 0$

Следователно $\omega(z)$ изобразява $|z|<1$ в $|\omega-i|<1$

$$\frac{1+i-\omega}{1+i-2i} : \frac{0-\omega}{0-2i} = \frac{i-z}{i-1} : \frac{1-z}{-1-1} \Rightarrow$$

$$\frac{(1+i-\omega)(-2i)}{(1+i-2i)(-\omega)} = \frac{(i-z)(-2)}{(i-1)(1-z)} \Rightarrow$$

$$(-2i+2+2i\omega)(i-1-iz+z) = (2z-2i)(-\omega-\omega i+2i\omega)$$