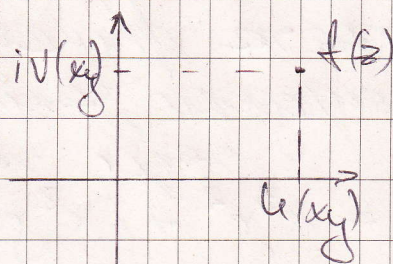
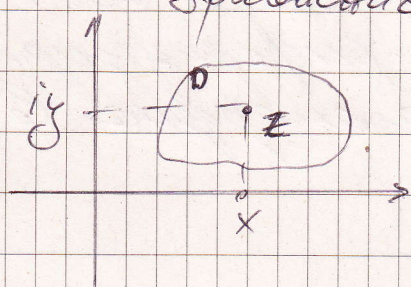


KA

23.10.14

Уравнение на Коши-Риман



$$f(z) = u(x,y) + iV(x,y), z \in D$$

Нека $f(z)$ е дефинирана в околност на $z_0 \in \mathbb{C}$.
 казваме че $f(z)$ е $\mathbb{C}$ -диференцируема ако има
 производна в z_0 , т.е. ако съществува крайната
 разлика $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. казваме че

$f(z)$ е холоморфна в z_0 , ако е $\mathbb{C}$ -диференцируема
 в околност на z_0

Th 1: Нека $f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$ е дефинирана в
 околност на точката $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Тогава
 1) ако $f(z)$ е $\mathbb{C}$ -диференцируема в z_0 , то
 $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имат първи частни производни
 в точката (x_0, y_0) и те изпълняват условията
 на Коши-Риман: $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$
 $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$

2) ако $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имат непрекъснатите първи
 частни производни в околност на (x_0, y_0) и в
 (x_0, y_0) те изпълняват уравненията на Коши-
 Риман, то $f(z)$ е $\mathbb{C}$ -диференцируема в z_0

Заг 2.4 да се намерят всички точки в които
 съответната функция е $\mathbb{C}$ -диференцируема
 и да се определи дали тя е холоморфна в
 тези точки

$$b) f(z) = x^3 y^2 + i x^2 y^3$$

$$u(x, y) = x^3 y^2 - \text{Re} f(z), \quad v(x, y) = x^2 y^3 - \text{Im} f(z)$$

Правим частните производни

$$u_x = 3x^2 y^2$$

$$v_x = 2x y^3$$

$$u_y = 2x^3 y$$

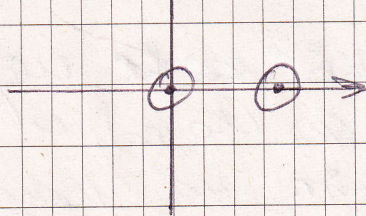
$$v_y = 3x^2 y^2$$

$$\text{CIP} \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 y^2 = 3x^2 y^2 \\ 2x^3 y = -2x y^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 y^2 = 3x^2 y^2 \\ xy(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

Решението на системата са точките от вида
 $(x, 0)$ и $(0, y)$

Отг. $f(z)$ е $\mathbb{C}$ -диференцируема в точките
 от координатните осе и не е холоморфна в тях



2, 4 x) $f(z) = y^2 \sin x + iy$
 Реши $u(x,y) = y^2 \sin x$, $v(x,y) = y$

$u_x = y^2 \cos x$ $v_x = 0$
 $u_y = 2y \sin x$ $v_y = 1$

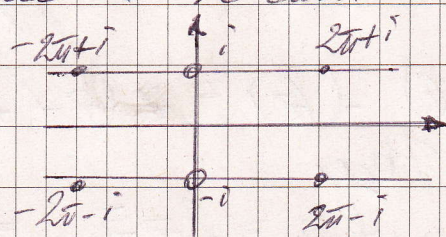
кД $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 \cos x = 1 \\ 2y \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow$

~~$\sin x = 0$~~ $\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 1$ (не може да е -1) $\Rightarrow$
 $y^2 = 1$

Това са решенията на системата $\begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Отг. $f(z)$ е $\mathbb{C}$ -диференцируема в точките

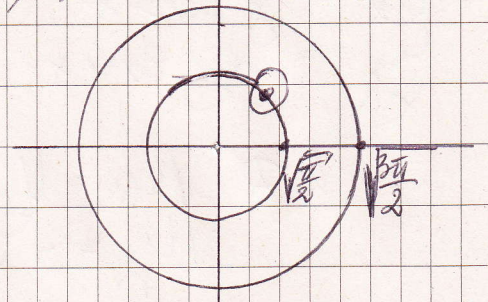
$z_k = 2k\pi \pm i, k \in \mathbb{Z}$ и не е
 холоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$



Ако $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$, $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Това уравненията на Коши-Риман са
 еквивалентни на уравнението $f'(z) = 0$

Заг 2.5 Да се намерят всички точки в които
свотвотната функция е $\mathbb{C}$ -диференцируема
и да се определи дали е холоморфна в тези
точки



a) $f(z) = \sin(z\bar{z}) = \sin |z|^2$

Реш

$$f_{\bar{z}} = \sin(z\bar{z})$$

$$f'_z = z \cos(z\bar{z}) = z \cos |z|^2$$

$$f'_z = 0 \Leftrightarrow z \cos |z|^2 = 0 \Leftrightarrow z=0 \text{ или } |z|^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

за $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Отт. $f(z)$ е $\mathbb{C}$ -диференцируема в точката 0 и
точките от окръжностите $|z| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
и не е холоморфна в тях (не можем да вземем област)

b) $f(z) = z(z + \bar{z}) = z^2 + z\bar{z}$

Реш

$$f_{\bar{z}} = 2z\bar{z} = 2|z|^2$$

$$f_{\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow 2|z|^2 = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Отт. $f(z)$ е $\mathbb{C}$ -диференцируема в точката 0
и не е холоморфна в нея

Th 2 Нека функцията $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ е
реална в област $D \subseteq \mathbb{C}$, $f(z)$ е холоморфна
в $D \Leftrightarrow u$ и v имат непрекъснати първи
частни производни в D и те удовлетворяват
в D уравненията на Коши-Рисман

Заг 26. Да се намери холоморфна функција
 $f(z) = u + iv$ за која

а) $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$
 да се намери $v(x, y)$

Реш

$$u_x = 6xy + 4x, \quad u_y = 3x^2 - 3y^2 - 4y$$

и

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \Rightarrow v_y = 6xy + 4x \\ u_y &= -v_x \Rightarrow v_x = -3x^2 + 3y^2 + 4y \end{aligned}$$

интегрираме v_y по y со фиксирано x

$$\int v_y dy = \int (6xy + 4x) dy \text{ т.е. } v = 3xy^2 + 4xy + f(x)$$

диференцираме v по x и го прикажеме во u_x

$$v_x = 3y^2 + 4y + f'(x) = -3x^2 + 3y^2 + 4y \Rightarrow$$

$$f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f(x) = -x^3 + C$$

$$\text{недователно } v = 3xy^2 + 4xy - x^3 + C \Rightarrow$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + i(3xy^2 + 4xy - x^3 + C)$$

$$\cancel{2z^2} - i(x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3) + iC = 2z^2 - i\bar{z}^3 + iC$$

$$z = x + iy, \quad z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$z^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$$

⑤