

Th за логаритмичната изведка. Принцип за аргумента

Def Нека $f(z)$ е холоморфна и $\neq 0$ в окр. на z_0

$$\frac{d \log f(z)}{dz} \Big|_{z=z_0} := \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}, \quad \log f - \text{дефиниран локално в окр. на } z_0$$

Св-ва на логаритмичната производна

$$1) \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}, \quad 2) \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$$

Нека нулите и полюсите на f са прости полюси на логаритмичната производна. При това ако a е u -кратна нула на f , а b е p -кратен полюс на f , то

$$\text{Res}(f'/f, a) = u \quad \text{и} \quad \text{Res}(f'/f, b) = -p$$

Лемма 1) Ако a е u -кратна нула на f , то съществува функцията $g(z)$, холоморфна и $\neq 0$ в окр. на a , т.е. $f(z) = (z-a)^u g(z)$, за $z \in U$.
Имаме $\frac{f'}{f} = \frac{[(z-a)^u g(z)]'}{(z-a)^u g(z)} = \frac{u}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$

където $\frac{g'(z)}{g(z)}$ е холоморфна в $U \Rightarrow$

a е прост полюс на f'/f и $\text{Res}(f'/f, a) = u$

Ако c е p -кратен полюс на f , то $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-c)^p}$, за $z \in V$. Тук $\psi(z)$ е холоморфна и $\neq 0$ в околност на c , т.е.

$$\frac{f'}{f} = \frac{\psi'}{\psi} - \frac{(z-c)^p \psi'}{(z-c)^{2p}} = \frac{-p}{z-c} + \frac{\psi'}{\psi} - \text{холоморфна}$$

$\Rightarrow c$ е прост полюс и $\text{Res}(f'/f, c) = -p$

Тук за логаритмически индекс
Нека γ е затворена ориентирана крива и f е холоморфна в околност на $\bigcup_{j=1}^l \gamma_j$, с изключение на краен брой полюси в $\text{Int } \gamma$ и нека $f(z) \neq 0$ за $z \in \gamma$. Тогава

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz}_{\text{лог. индекс}} = N_f - P_f, \text{ където } N_f - \text{брой на нулите на } f \text{ в } \text{Int } \gamma, \text{ а } P_f \text{ е брой на полюсите на } f \text{ в } \text{Int } \gamma$$

Затова

Нека $a_1, \dots, a_s$ са нулите на f в $\text{Int } \gamma$, съответно от кратност $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, а $b_1, \dots, b_l$ са полюсите на f в $\text{Int } \gamma$ от кратност $\beta_1, \dots, \beta_l$. От лемата и тук за резидуумите имаме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^s \alpha_k \text{Res}(a_k) + \sum_{j=1}^l \beta_j \text{Res}(b_j) =$$

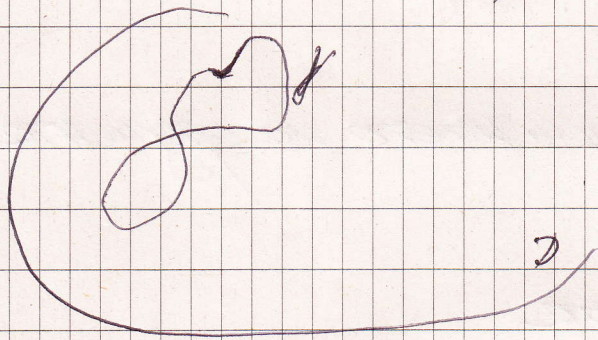
$$\sum_{k=1}^s \alpha_k - \sum_{j=1}^l \beta_j = N_f - P_f$$

Следствие. Ако γ е затворена ориентирана крива и f - холоморфна в ок на $\gamma \cup \text{Int } \gamma$
 $f(z) \neq 0, z \in \gamma$ то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathbb{N}_f$$

Геометрично тълкуване на логаритмичния резултат

Нека γ е затворена крива, $\gamma \subset D, f: D \rightarrow \mathbb{C}$ - холоморфна и $f|_{\gamma} \neq 0$



Нека

Ако D е едносвързана област и f е холоморфна и $\neq 0$ в D , то D може да се

отрази еднозначен клон на $\log f(z)$

док

По условие функцията f'/f е холоморфна в едносвързаната област D . Точка f'/f има примитивна в D - F т.е. F - холоморфна в D , $F' = f'/f$ в D . Разреш $f e^{-F}$ - холом в D

$$(f e^{-F})' = f' e^{-F} + f (e^{-F})' = f' e^{-F} - f \frac{f'}{f} e^{-F} = 0 \Rightarrow$$

$f e^{-F} \equiv \text{const}$ в D и тъй като $\neq 0$ т.е. $f(z) e^{-F(z)} = e^C$
 $e^{F(z)+C} = f(z), z \in D \Rightarrow F(z) + C = \log f(z)$ т.е.
 $F(z) + C$ е еднозначен клон на $\log f(z)$ в D

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, z \in \gamma(t)$$

на дефинираме непрекъснатата функция $\log f(z)$
 $z \in \gamma$ т.е. $\log f(\gamma(t))$ е непрекъсната в $[a, b] \Rightarrow$
 $\arg f(\gamma(t))$ е непрекъснатата в $[a, b]$. Тогава

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d \log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \log f(\gamma(t)) \Big|_a^b =$$

$$\frac{1}{2\pi i} [\log |f(\gamma(b))| + i \arg f(\gamma(b)) - \log |f(\gamma(a))| - i \arg f(\gamma(a))]$$

$$\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} i [\arg f(\gamma(b)) - \arg f(\gamma(a))] =$$

$$= \frac{\Delta \arg f(z)}{2\pi} - \text{изменението на аргумента}$$

Принцип на аргумента

Нека γ е затворена хоранова крива, f е
 холоморфна в $\text{int } \gamma$, с изключения на
 краен брой полюси в $\text{int } \gamma$ и $f(z) \neq 0, z \in \gamma$
 Тогава $N_f - P_f = \frac{\Delta \arg f(z)}{2\pi}$, където $\Delta \arg f(z)$ е
 изменението на аргумента $\arg f(z)$ когато
 ~~z~~ z обикои веднъж γ

Тн на Рунге. Принципи за заместване на
 областите

Тн на Рунге. Нека f, g са холоморфни в Ω
 на $\gamma \cup \text{int } \gamma$, γ е затворена хоранова крива и
 $|f(z)| < |g(z)|$ за $z \in \gamma$. Тогава функциите f и g имат

получить бросок нуля в $\text{Int } \gamma$ (броски с кратностью)

① от $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$, $z \in \gamma \Rightarrow f(z) \neq 0, z \in \gamma$
 от $|f(z)| > |g(z)| \geq 0 \Rightarrow |f(z) + g(z)| = |f(z) - g(z)| > 0, z \in \gamma$
 $\Rightarrow f(z) + g(z) \neq 0, z \in \gamma$

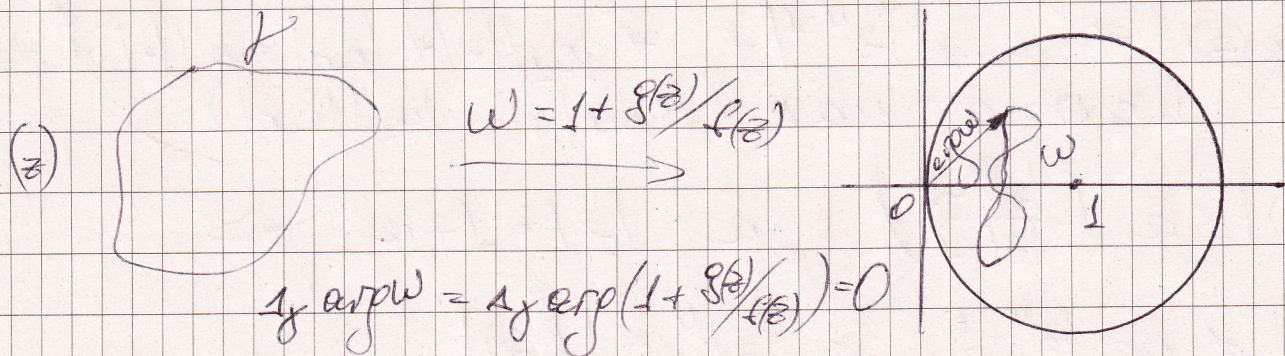
② от принципа за аргумента имеем
 $N_f = \frac{\Delta \gamma \arg f(z)}{2\pi}$, $N_{f+g} = \frac{\Delta \gamma \arg(f+g)}{2\pi}$

имеем $f+g = f(1+g/f) \Rightarrow$

(*) $\arg(f(z) + g(z)) = \arg f(z) + \arg(1 + g(z)/f(z))$ -
 кото совпадает на множестве
 дефиниране непрекъснати ~~на~~ $\arg f(z)$ и
 $\arg(1 + g(z)/f(z))$ в γ и $\arg f(z)$ и
 непрекъснат $\arg(f(z) + g(z))$, $z \in \gamma$. Тогава
 $\Delta \gamma \arg(f(z) + g(z)) = \Delta \gamma \arg f(z) + \Delta \gamma \arg(1 + g(z)/f(z))$

? $\Delta \gamma \arg(1 + g(z)/f(z)) = 0$

$|w-1| = |g(z)/f(z)| < 1$ - везе



$\overrightarrow{0w}$ не обикара около 0 !!!

Следствие $\Delta \gamma \arg(f+g) = \Delta \gamma \arg f$ т.е. $N_{f+g} = N_f$

①

Пример как определить положение на нуле на полинома $P(z) = z^4 + 6z + 3$

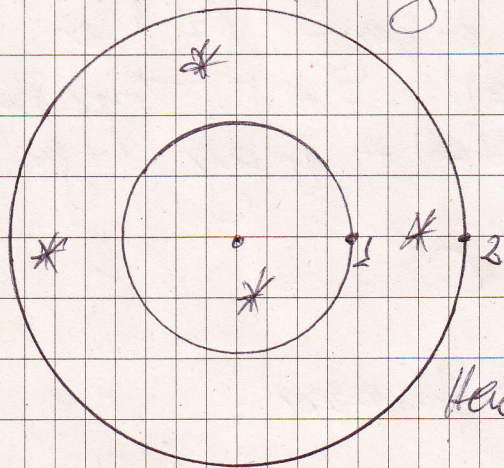
① $f(z) = z^4$, $g(z) = 6z + 3$

за $|z| = 2$ имаме че $|g(z)| = |6z + 3| \leq 6|z| + 3 = 15$
 $|f(z)| = |z|^4 = 2^4 = 16 > 15$

от Th на Руше $\Rightarrow P(z) = f(z) + g(z)$ има 6. $|z| < 2$
 точно нули, които нули има $f(z) = z^4$
 т.е. 4

② $f(z) = 6z$, $g(z) = z^4 + 3$

за $|z| = 1$, $|g(z)| \leq |z|^4 + 3 = 4 < 6 = 6|z| = |f(z)| \Rightarrow$
 $P(z) = f(z) + g(z)$ има точно една нула $6|z| < 1$



Още едно доказателство
 на основната Th на
 алгебрата

$P(z) = z^u + a_{u-1}z^{u-1} + \dots + a_1z + a_0$
 Нека $f(z) = z^u$, $g(z) = a_{u-1}z^{u-1} + \dots + a_1z + a_0$

$|g(z)| \leq |a_{u-1}||z|^{u-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0| \leq a(|z|^{u-1} + \dots + 1)$
 където $a = \max(|a_{u-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|)$

$|g(z)| \leq a \left(\frac{|z|^u - 1}{|z| - 1} \right)$, за $|z| = 1 + a \Rightarrow$

$|g(z)| \leq a \frac{|z|^u - 1}{a} < |z|^u = |f(z)|$

от Th на Руше $\Rightarrow P_u(z) = f(z) + g(z)$ има
 $|z| < 1 + a$ точно u нули