KA 18.12.14

Th за резидуумите

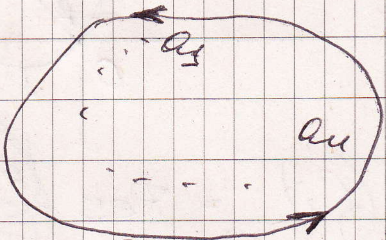
Деф

Нека $f(z)$ е холоморфна в прободената околност $K(a,R,0)$ и $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ е лорановото ѝ развитие там. $\operatorname{Res}(f,a)=a_{-1}$ – резидуум на f в a

Th за резидуумите

Ако γ е положително ориентирана затворена жорданова крива и $f(z)$ е холоморфна в $\gamma \cup \operatorname{Int}\gamma$ с изключение на краен брой точки $a_1 \ldots a_n$, лежащи вътре в γ (в $\operatorname{Int}\gamma$). Тогава

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f,a_k)$$



Правила за пресмятане на Res

1) (резидуум в еднократен (прост) полюс)

Ако $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, където $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ са холоморфни в околност на z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, то

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

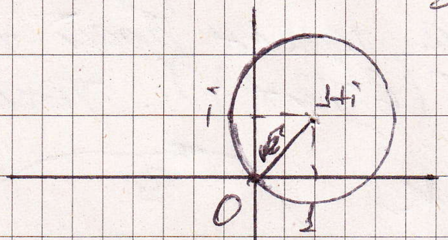
2) (резидуум в многократен полюс)

Ако $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, където $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ е холоморфна в околност на z_0, то

$\operatorname{Res}(f,z_0)=a_{m-1}$. Ако z_0 е отстранима особенна точка на $f(z_0)$, то $Res(f, z_0) = 0$!

Зад 9.2) $I = \int_C \frac{dz}{(z-1)^2\cdot(z^2+1)}$, където $C = C(1+i, \sqrt{2})$

Нека $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$. Особенните точки на $f(z)$ в $\mathbb{C}$ са 1 и $\pm i$. (нулите на знаменателя)
(Взимаме само 1 и i защото $-i$ не лежи в окръжността)



Тогава $I = 2\pi i(Res(f,1) + Res(f,i))$

$$Res(f,i) = Res\left(\frac{\overbrace{\frac{1}{(z-1)^2}}^{=\varphi(z)}}{\underbrace{z^2+1}_{=\psi(z)}}, i\right) = \frac{\frac{1}{(z-1)^2}\Big|_{z=i}}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i(i-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2i(-2i)} = \frac{1}{4}$$

$$Res(f,1) = Res\left(\frac{\frac{1}{z^2+1}}{(z-1)^2}, 1\right) =$$

$$= Res\left(\frac{a_0 + a_1(z-z_1) + a_2(z-z_1)^2 \dots}{(z-1)^2}, 1\right)$$ Търсим кога знаменателя става -1 степен

$$= a_1 = \frac{\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'}{1!}\Bigg|_{z=1} = \frac{-2z}{(z^2+1)^2}\Bigg|_{z=1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i\left(\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Деф

Нека $f(z)$ е холоморфна в $|z|>R$ и $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ е лорановото ѝ развитие там

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -a_{-1}$$

Ако $\exists\, f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$, то $\operatorname{Res}(f,\infty) =$

$$-\lim_{z\to\infty}\left[z\left(f(z)-f(\infty)\right)\right]$$

$$f(z) = \underset{f(\infty)}{\overset{}{a_0}} + \overset{=0}{\frac{a_{-1}}{z}} + \overset{=0}{\frac{a_{-2}}{z^2}} - - - \text{ за } z\to\infty, \text{ т.е.}$$

$$z\left(f(z)-f(\infty)\right) = z\left(f(z)-a_0\right) = a_{-1} + \overset{=0}{\frac{a_{-2}}{z}} + \dots$$

$$\Rightarrow -\lim_{z\to\infty}\left[z\left(f(z)-f(\infty)\right)\right] = -a_{-1}$$

Th Ако $f(z)$ е холоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$, то

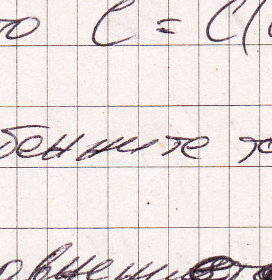
$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_k) + \operatorname{Res}(f,\infty) = 0 \quad !!!$$

Зад 9.4 $\quad I = \int_C \frac{5z^6+4}{2z^7+1}\,dz$, където $C = C(0,1)$

Реш Нека $f(z) = \frac{5z^6+4}{2z^7+1}$. Особените точки на $f(z)$ в $\mathbb{C}$ са корените на уравнението

$z^7 = -\frac{1}{2}$ т.е. точките $z_k = \sqrt[7]{\frac{1}{2}}\, e^{i\frac{\pi+2k\pi}{7}}$

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{i\pi}$, $k=1,\dots,7$



$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{7} \operatorname{Res}(f, z_k) = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty) \quad (\text{от пред. Th})$$

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \qquad \left(\frac{1}{\infty}\right)$$

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\lim_{z\to\infty}\left[z\left(f(z) - f(\infty)\right)\right] = -\lim_{z\to\infty}\left[z \cdot f(z)\right] =$$

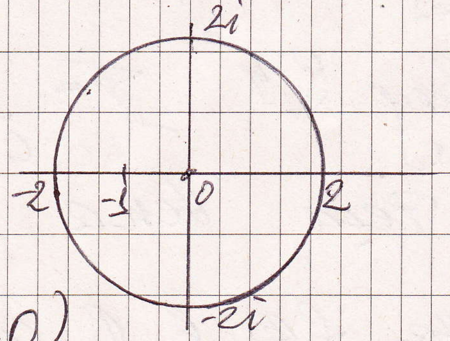
$$= -\lim_{z\to\infty} \frac{5z^7+4z}{2z^7+1} = -\lim_{z\to\infty} \frac{z^7\left(5+4/z^6\right)}{\left(2+1/z^7\right)} = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow I = -2\pi i\left(-5/2\right) = \underline{\underline{5\pi i}}$$

Известна е формулата $\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

$\boxed{§.10}$ $$I = \int_C \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\,dz, \quad C = C(0,2)$$

Нека $f(z) = \dfrac{z^3 e^{1/z}}{z+1}$. Особените точки на $f(z)$ в A са 0 (от $e^{1/z}$) и -1



$$I = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,-1)\right) =$$

$$-2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z^3} e^{z}}{\frac{1}{z}+1} = \frac{1}{z^4} \frac{e^{z}}{1+z}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4}\left[\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots\right)\left(1-z+z^2-z^3+\dots\right)\right], 0\right)$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad , \quad |z| < 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4}\left(a_0 + a_1 z + \dots\right), 0\right) = a_3 = 1.(-1) + 1.1 + \frac{1}{2!}(-1) + \frac{1}{3!}1$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{I} = -\frac{2\pi i}{3}$$

5