

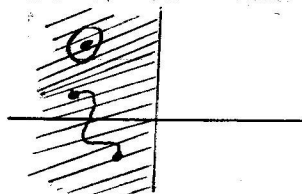
КА 16.10.14

- Едно мн-во в комплексната равнина се нарича
 - Отворено - ако заедно с цяла нейна точка съдържа и цяла нейна околност, т.е. отворен кръг с център точката
 - Свързано - ако всеки 2 точки от мн-вото могат да се свържат с крива лежаща в множеството
 - Област - ако е едновременно отворено и свързано

1.13 Да се зачеркват в комплексната равнина

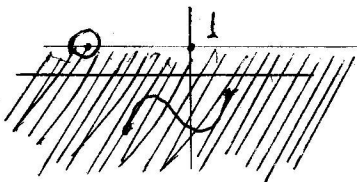
- съответните мн-ва от точки и да се определят дали са област

а) $\operatorname{Re} z < 0$



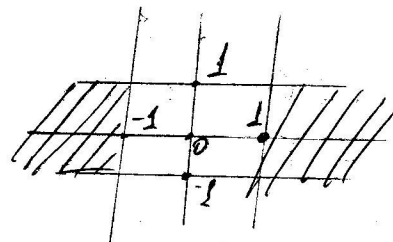
свързано } област
отворено }

б) $\operatorname{Im} z \leq 1$

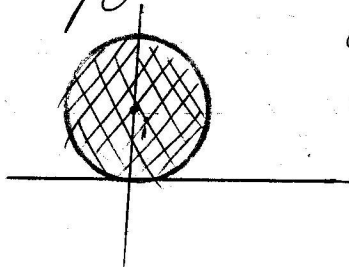


свързано } не е област
не е отворено (при $z = 1 + i$)

- в) ~~на~~ $| \operatorname{Im} z | < 1, | \operatorname{Re} z | > 1$
 $| \operatorname{Im} z | < 1 \Rightarrow -1 < \operatorname{Im} z < 1$
 $| \operatorname{Re} z | > 1 \Rightarrow \operatorname{Re} z > 1 \text{ или } \operatorname{Re} z < -1$
 не е област защото не е свързано



г) $|z - i| < 1$



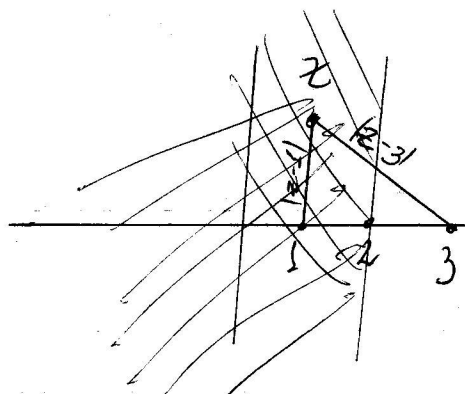
свързано } област
отворено }

$$e) |z-1| \leq |z-3|$$

не е обвързано

вероятно } не е област

(само при $|z-2| \Rightarrow |z-1| = |z-3|$)

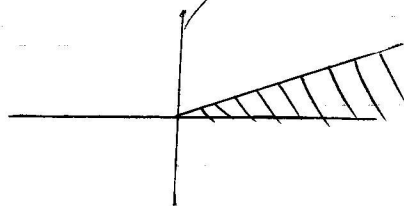


$$*) 0 < \arg z < \pi/4$$

област

отворено

вероятно

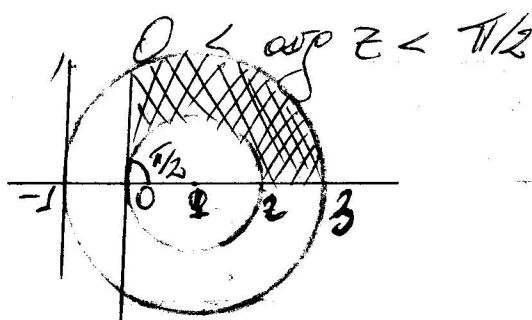


$$u) 1 < |z-1| < 2$$

вероятно

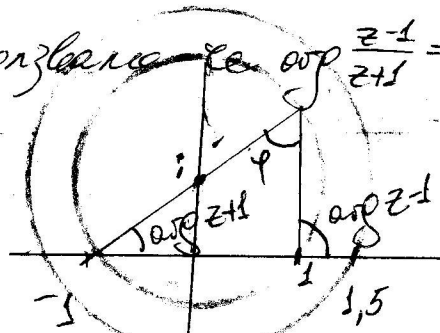
отворено

област



$$3) \arg \frac{z-1}{z+1} = \pi/4 = \varphi \quad \text{използваме че } \arg \frac{z-1}{z+1} = \arg(z-1) - \arg(z+1)$$

$$\text{Тен) } \operatorname{Im} z > 0$$



точките от $\operatorname{Im} z > 0$ които удовлетворяват

$$\arg \frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{4} \text{ са т.те от реалта } \{|z-i| = \sqrt{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$$

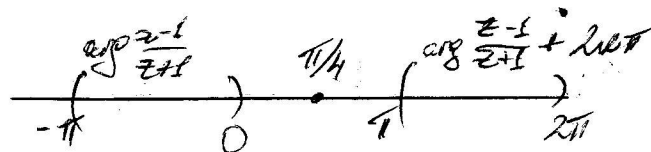
2ст) $\operatorname{Im} z = 0$. За φ не съществува ако

$$z \pm 1 = 0 \quad \arg \frac{z-1}{z+1} = 2k\pi, \text{ ако } z \in \{-\infty; -1\} \cup \{1; +\infty\}$$

$$\text{и } \arg \frac{z-1}{z+1} = \pi + 2k\pi, \text{ ако } z \in \{-1; 1\}. \text{ Аз не}$$

то еки от Re правя които са с решение

$$3a) \operatorname{Im} z < 0$$



$\varphi = \arg(z-1) - \arg(z+1)$ - няма точки от реалната полуовърхност, които да са решение

Решението е $\operatorname{Im} z < 0$ - не е област

$$c) \operatorname{Re} \frac{z}{1-z} > 0 \quad \text{Нема } z = x+iy \Rightarrow$$

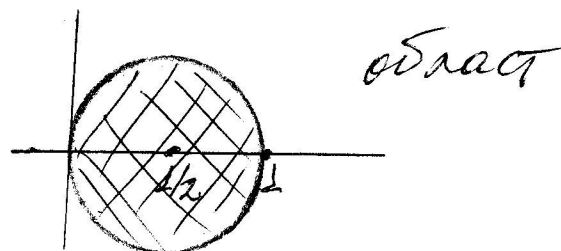
$$\operatorname{Re} \frac{z}{1-z} = \operatorname{Re} \frac{x+iy}{(1-x)-iy} \quad (\text{умножаваме знаменателя})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \frac{(x+iy)(1-x)+iy}{(1-x)^2+y^2} = \frac{x-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(1-x)-y^2 > 0 \\ (x,y) \neq (1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2-x+y^2 < 0 \\ (x^2-2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + y^2 < \frac{1}{4} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow |z-\frac{1}{2}|^2 < \frac{1}{4} \quad \text{т.е.}$$

$$|z-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$$



1.5 g) Да се реши у-то $z^4 = -i$

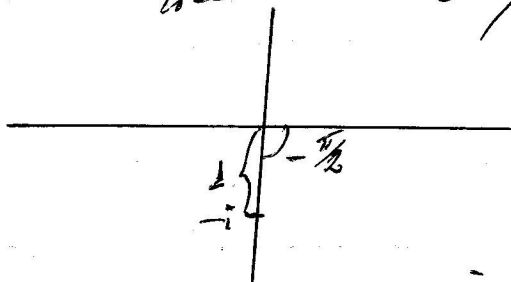
Модул $z^4 = a$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$

$$a \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$$

$a \neq 0 \Rightarrow a = \rho e^{i\varphi}$ и резултата са

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Ф-ла на модул



$$|-i| = 1$$

$$\arg(-i) = -\pi/2$$

$$z^4 = -i \Rightarrow z_k = \sqrt[4]{1} e^{i \frac{(-\pi/2) + 2k\pi}{4}} \Rightarrow e^{i \frac{(-\pi/2) + 2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$