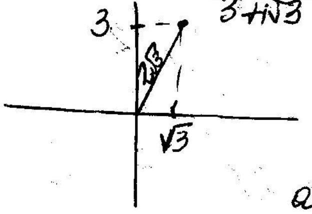
КА 03.10.14

$z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Ф-ла на Моавър

при $a = 0 \Rightarrow z = 0$

при $a \neq \Rightarrow$ то $a = re^{i\varphi}$ ($r = |a|$) и корените на у-то са $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Зад 1.5 е) Да се реши у-то $z^3 = \sqrt{3} + 3i$



$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$

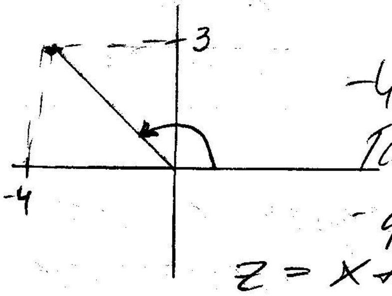
$\arg(\sqrt{3} + 3i) = \frac{\pi}{3}$

$\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}}$

Заб. Уравнение от вида $z^2 = a$ или $z^3 = a$ в което a няма "хубав" тригонометричен вид е по-добре да се решава без формулата на Моавър

Пример

$z^2 = -4 + 3i$ $\qquad |a| = \sqrt{9+16} = 5$



$\arg(a) = \frac{\pi}{2} + \arccos 3/5$

$-4 + 3i$ няма хубав тригонометричен вид

По-добре е да го решим без да използваме ф-лата на Моавър

$z = x + iy \Rightarrow (x+iy)^2 = -4 + 3i \Rightarrow$

$x^2 + 2ixy - y^2 = -4 + 3i$

Re← Re→ $\left|\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -4 \\ 2xy = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -4 \\ y = \frac{3}{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - \frac{9}{4x^2} = -4 \\ y = \frac{3}{2x} \end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l} 4x^4 + 16x^2 - 9 = 0 \\ y = \frac{3}{2x} \end{array}\right.$ $\qquad$ Полагаме $x^2 = t$

$4t^2 + 16t - 9 = 0$

$D_1 = 100 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -\frac{9}{2}$ (НЕ)

t_2 не става, защото търсим Re решение

Отг. решенията на уравнението са

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$ и $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\quad (x^2 = t)$

Зад. Да се докаже тъждеството

а) $|z+w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2$

б) $|z-w|^2 = |z|^2 - 2Re(z\bar{w}) + |w|^2$

в) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ и го изтълкувайте геометрично

Док. а) Използваме че $a\bar{a} = |a|^2$, $a \in \mathbb{C}$

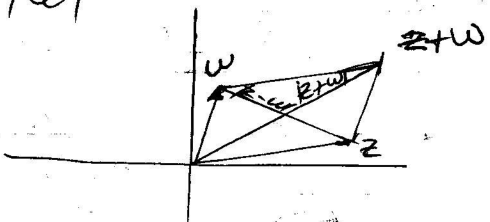
$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) =$

$z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} = |z|^2 + (z\bar{w} + \bar{z}\bar{w}) + |w|^2 =$

$|z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2$

б) Аналогично на а)

в) Събираме а) и б)



Геометрично тълкуване

във всеки успоредник сбора от квадрата на диагоналите е равен на сбора на квадратите на четирите страни на успоредника

(1.10) Да се пресметне

а) $S = (1+i\sqrt{3})^7 + (1-i\sqrt{3})^7$

$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$, $\varphi_1 = \pi/3$

$|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$, $\varphi_2 = -\pi/3$

$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$

$$S = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{3}} + 2^7 e^{-i\frac{7\pi}{3}} = 2^7\left(e^{i\frac{7\pi}{3}} + e^{i\cdot-\frac{7\pi}{3}}\right) =$$

$$2^8 \cos\frac{7\pi}{3} = 2^8 \cos\pi/3 = 2^8 \cdot \frac{1}{2} = 128$$

$$\left(\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)$$

б) $S = (1+i)^{100} \cdot (1-i\sqrt{3})^{-51}$ $\quad (e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi)$

разгл. $1+i \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $|1+i| = \sqrt{2}$

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $\quad 1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$

$$S = \left(2^{50} e^{i25\pi}\right)\left(2^{-51} e^{i17\pi}\right) = \frac{1}{2} e^{i42\pi} = \frac{1}{2}\cdot e^0 = \frac{1}{2}$$

д) $S = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin(2n-1)\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$S = \operatorname{Im}\left[e^{i\alpha} + e^{i3\alpha} + \dots + e^{(2n-1)\alpha}\right] =$

(от $\cos\alpha + i\sin\alpha$, $\cos3\alpha + i\sin3\alpha \dots$)

от това че е геометрична прогресия $\Rightarrow a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$

т.е. $S = \operatorname{Im}\left[e^{i\alpha}\frac{e^{i2n\alpha}-1}{e^{i2\alpha}-1}\right]$ защото имаме n-броя елемента

$e^{i\alpha} = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 2k\pi$ т.е. $\alpha = k\pi$

$e^{i\alpha 2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi$

$$\operatorname{Im}\left[e^{i\alpha}\frac{e^{i2n\alpha}-1}{e^{i\alpha2}-1}\right] = \operatorname{Im}\left[e^{i\alpha}\frac{e^{in\alpha}\left(e^{in\alpha}-e^{-in\alpha}\right)}{e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)}\right] =$$

$$\operatorname{Im}\left[e^{in\alpha}\frac{2i\sin n\alpha}{2i\sin\alpha}\right] = \operatorname{Im}\left[(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right]$$

! имагинерна

$$= \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$$

Отв: $S = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha} & \text{при } \alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ 0 & \text{при } \alpha = k\pi \end{cases}$

з) $S = \cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \ldots + \cos\frac{10\pi}{11}$

$$S = Re\left[e^{i\frac{2\pi}{11}} + \ldots + e^{i\frac{10\pi}{11}}\right] = Re\left[e^{i\frac{2\pi}{11}}\,\frac{e^{i\frac{10\pi}{11}} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{11}} - 1}\right] =$$

$$= Re\left[e^{i2\pi}\,\frac{e^{i\frac{5\pi}{11}}\left(e^{i\frac{5\pi}{11}} - e^{-i\frac{5\pi}{11}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{11}}\left(e^{i\frac{\pi}{11}} - e^{-i\frac{\pi}{11}}\right)}\right] = Re\left[e^{i\frac{6\pi}{11}}\,\frac{2i\sin\frac{5\pi}{11}}{2i\sin\frac{\pi}{11}}\right]$$

$$= \cos\frac{6\pi}{11}\cdot\frac{\sin\frac{5\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}}$$