КА 08.01.15

Пресмятане на реални интеграли чрез Т-ма за резидуумите

① Интеграли от вида $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$, където $R(x,y)$ е рационална функция

Реш.

Полагаме $z = e^{i\theta}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$$

$$dz = de^{i\theta} = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\theta \in [0,2\pi) \Rightarrow z \in C(0,1)$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \int_{C(0,1)} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$$

Последният интеграл се решава с Т-ма за резидуумите

Зад. Да се пресметне $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{5+3\cos\theta}\,d\theta$

Полагаме $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$,
$\theta \in [0,2\pi) \Rightarrow z \in C(0,1)$

$$I = \int_{C(0,1)} \frac{\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}{5+3\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{C(0,1)} \frac{\cancel{2z}(z^2+1)^2}{2\cancel{4}z^2(3z^2+10z+3)}\frac{1}{\cancel{z}}\,dz$$

$$\frac{1}{2i}\int_{C(0,1)} \frac{(z^2+1)^2}{z^2(3z^2+10z+3)}\,dz = \frac{1}{2i}\,2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Res}(0)\right)$$

(корените на кв. ур-е са $-3; -\frac{1}{3}$, но -3 е извън $C(0,1)$)

$$\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{3}\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{(z^2+1)^2}{z^2}}{3z^2+10z+3}, -\frac{1}{3}\right) \overset{\text{прост полюс}}{=} \frac{\left(\frac{z^2+1}{z^2}\right)^2\Big|_{z=-\frac{1}{3}}}{(6z+10)\Big|_{z=-\frac{1}{3}}} =$$

$$\frac{\frac{\frac{100}{81}}{1/9}}{8} = \frac{100}{72} = \frac{25}{18}$$

$$\operatorname{Res}(0) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{(z^2+1)^2}{3z^2+10z+3}}{z^2}, 0\right) \overset{\text{двукратен полюс}}{=} \text{в ред на Тейлор}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{a_0+a_1z+\dots}{z^2}, 0\right) = a_1 = \frac{\left(\frac{(z^2+1)^2}{3z^2+10z+3}\right)'\Big|_{z=0}}{1!} =$$

$$\frac{2(z^2+1)2z(3z^2+10z+3)-(z^2+1)^2(6z+10)}{(3z+10z+3)^2}\Big|_{z=0} =$$

$$= -\frac{10}{9} \Rightarrow I = \pi\left(\frac{25}{18}-\frac{20}{18}\right) = \frac{5\pi}{18}$$

Зад 9.17. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta$

$$I = \int_{C(0,1)} \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5+4\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \cdot \frac{1}{iz}\,dz = \int_{C(0,1)} \frac{z(z^2+1)}{2z(5z+2z^2+2)} \cdot \frac{1}{iz}\,dz =$$

$$\frac{1}{2i}\int_{C(0,1)} \frac{z^2+1}{z(2z^2+5z+2)}\,dz \quad . \quad z_1 = 0,\ z_{2,3} = \begin{cases} -2 & (\text{не е в } (0,1)) \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\cancel{2i}}\cancel{2}\pi\cancel{i}\left(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}\left(f,-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\operatorname{Res}(f,0)=\operatorname{Res}\left(\frac{\frac{z^2+1}{2z^2+5z+2}}{z},0\right)=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}\left(f,-\frac{1}{2}\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{\frac{z^2+1}{z}}{2z^2+5z+2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{z^2+1}{z}\Big|_{z=-1/2}}{4z+5\Big|_{z=-1/2}}=-\frac{5}{6}$$

$$I=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

2) Интеграли от вида $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, където

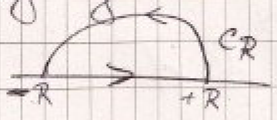
$P(z)$ и $Q(z)$ са полиноми и $\deg Q \geq \deg P + 2$

Ако $Q(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$, то $\int_{-\infty}^{\infty} \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}$

Ако $Q(a)=0$, $a\in\mathbb{R}$, и $Q(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$, то
$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to+\infty}}\left(\int_{-R}^{a-\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^{+R}\right)$. В този случай $\int_{-\infty}^{+\infty}$ се

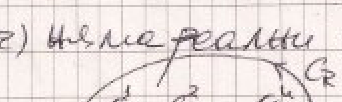
нарича главна стойност и се означава v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty}$

Аналогично се определя v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty}$, ако Q има повече от една реална нула. Такива интеграли се пресмятат, като се интегрира функцията $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ по контура



, ако $Q(z)$ няма реални нули

или по контура



, ако

$a_1, a_2 \ldots a_n$ са всичките реални нули на $Q(z)$

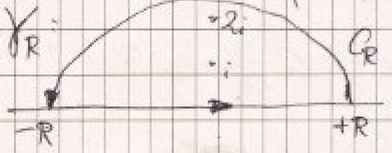
R се избира толкова голямо, а ε толкова малко, че всичките нули на $Q(z)$, които лежат в горната полуравнина да попаднат вътре в контура

Зад. $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx$, но $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx$

защото подинтегралната функция е четна

Нека $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$. Ос. т. на $f(z)$ са $\pm i, \pm 2i$

γ_R:



$\Longleftrightarrow \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz =$

$2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,2i))$ (1*)

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{1}{(R^2-1)^2(R^2-4)}\pi R \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \int_{C_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Използваме $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M\,\ell(\gamma)$, където $M = \max_{z\in\gamma}|f(z)|$

$\ell(\gamma)$ е дължината на γ

За C_R $\quad |z^2+1| \ge |z|^2 - 1 = R^2 - 1 > 0$

$|z^2+4| \ge |z|^2 - 4 = R^2 - 4 > 0$

Правиме граничен преход $\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$

От (1*) при $R \to +\infty \Rightarrow 2I = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,2i))$

$$\mathrm{Res}(f,2i) = \mathrm{Res}\left(\frac{\frac{1}{(z^2+1)^2}}{z^2+4}, 2i\right) = \frac{1/9}{4i} = \frac{1}{36i}$$

$$\operatorname{Res}(f,i) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)}}{(z-i)^2}, i\right) = \text{Ред на Тейлър}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{a_0 + a_1(z-i) + \dots}{(z-i)^2}, i\right) = a_1 = \frac{\left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)}\right)'\Big|_{z=i}}{1!} =$$

$$= -\frac{2\cancel{(z+i)}(z^2+4) + (z+i)^{\cancel{2}}\cdot 2z}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}(z^2+4)^2} = -\frac{2\cdot 3 - 4}{-8i\cdot 9} = \frac{2}{72i} = \frac{1}{36i}$$

$$J = \pi\cdot i\,\frac{2}{36i} = \frac{\pi}{18}$$