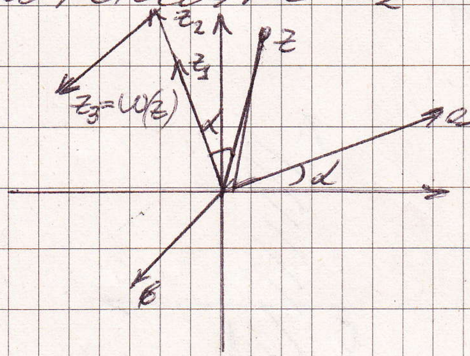
КА 06.11.14

Дробно-линейни функции (ДЛФ)

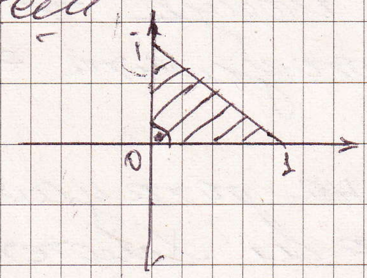
① Линейни функции (ЛФ). Това са функциите от вида $w(z)=az+b$, $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$. $w(z)$ изобразява взаимно еднозначно $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, където $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, като $w(\infty)=\infty$. Ако $a=re^{i\alpha}$, то $w(z)$ е композиция на ротацията $z_1=e^{i\alpha}z$, хомотетията $z_2=rz_1$, и транслацията $z_3=z_2+b$.



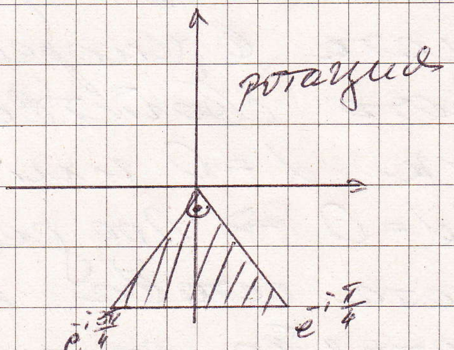
Следователно $w(z)$ изобразява права в права, окръжност в окръжност и запазва ъглите м/у правите по големина и ориентация.

Зад 3.4 Да се намери линейна функция $w(z)=az+b$, която изобразява $\Delta(1,i,0)$ в $\Delta(0,2,1+i)$

Реш.

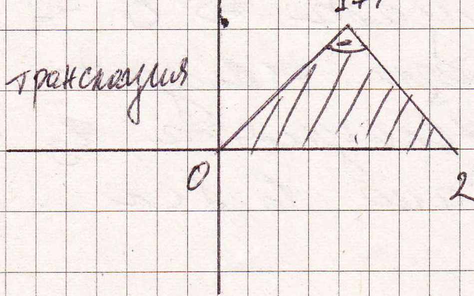


$z_1=e^{-i\frac{3\pi}{4}}z \longrightarrow$



$\longrightarrow$

$z_2=\sqrt{2}z_1 \longrightarrow$



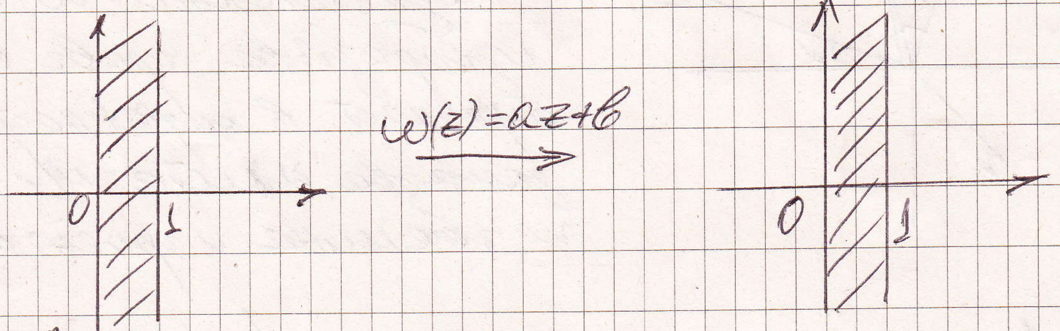
$$\omega(z) = z_3 \circ z_2 \circ z_1 = z_2 + 1 + i = \sqrt{2} z_1 + 1 + i =$$

$$\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}} z + 1 + i$$

Зад 3.8 а) Да се намерят всички линейни функции, които изобразяват ивицата $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ в себе си.

Реш.

Нека линейната функция $\omega(z) = az + b$ е решение на задачата.



Ако a има тригонометричен вид то $a = re^{i\alpha}$, откъдето $\omega(z)$ е композиция на ротация $z_1 = e^{i\alpha}$, хомотетия $z_2 = r z_1$ и транслация $z_3 = z_2 + b$. Хомотетията z_2 и транслацията z_3 изобразяват ивицата в успоредна на нея ивица $\Rightarrow$ същото свойство има и ротацията z_1, оттук $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$.

1сл) $\alpha = 0 \Rightarrow$ под действието на ротация z_1 ивицата остава на мястото си. Хомотетията z_2 не трябва да променя ширината на ивицата $\Rightarrow r = 1$ т.е. $z_2 = 1 \cdot z_1$. За да се запази ивицата и под действието на транслацията z_3 трябва $b = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Така в 1сл $\omega(z) = z + i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2сл) $\alpha = \pi$

Сега ротацията z_1 изобразява ивицата $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ в ивицата $-1 \le \operatorname{Re} z \le 0$

Хомотетията z_2 не трябва да променя ширината на ивицата, следователно $r = 1$

Накрая да изобрази транслацията z_3 ~~от~~ ивицата $-1 \le \operatorname{Re} z \le 0$ в ивицата $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ трябва $b = 1 + i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Така в 2сл

$$\omega(z) = -z + 1 + i\lambda$$

Директно се проверява че получените отговори са наистина решение на задачата

(2) Дробно-линейни функции (ДЛФ)

Това са функциите от вида $\omega(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ за $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ дефинирани с равенствата $\omega(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} \omega(z) = \dfrac{a}{c}$

$$\omega\left(-\frac{d}{c}\right) = \lim_{z \to -\frac{d}{c}} \omega(z) = \infty$$

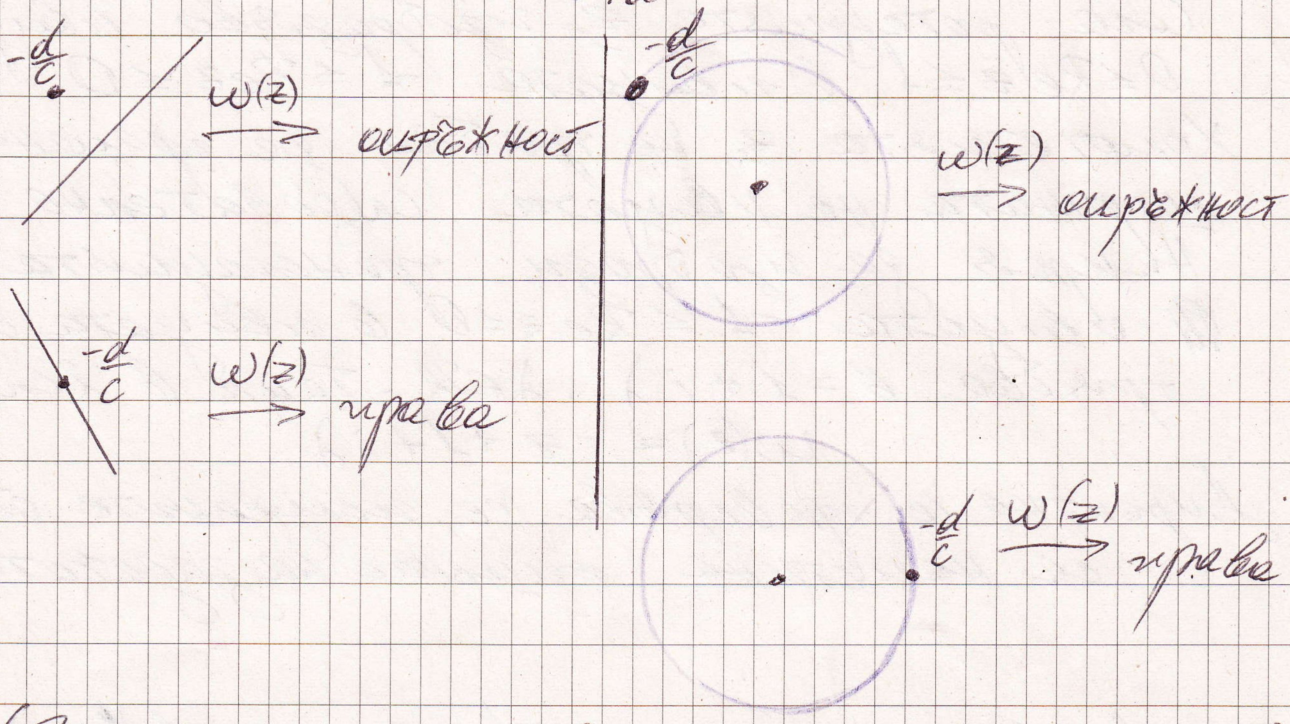
Основни свойства на ДЛФ

1) ~~Всяка~~ Всяка ДЛФ осъществява взаимно еднозначно и непрекъснато изображение на $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Това изображение е конформно т.е. запазва ъглите м/у кривите по големина и ориентация

Правите и окръжностите в $\mathbb{C}$ ще наричаме обобщени окръжности

2) Всяка ДЛФ изобразява обобщена окръжност в обобщена окръжност

Нека $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$



3) (Принцип на съответствието на границите)
Нека кривата γ_1 разделя $\mathbb{C}$ на две области. Нека ДЛФ $w(z)$ изобразява γ_1 в γ_2, която също разделя $\mathbb{C}$ на две области. Тогава $w(z)$ изобразява областта която лежи отляво на γ_1 в областта която лежи отляво на γ_2 (аналогично и за областта отдясно)

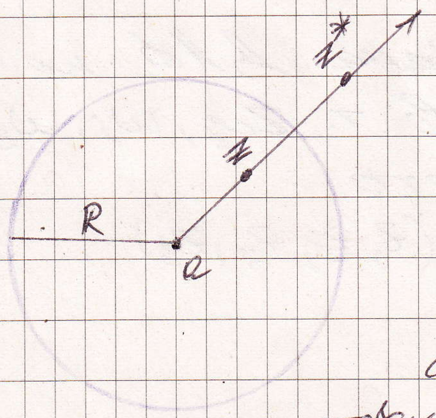
4) Инверсия - под инверсия спрямо правата разбираме симетрия спрямо правата.
Нека сега $C(a,R)$ е окръжност. Под инверсия спрямо $C(a,R)$ разбираме геометричното преобразуване, което на всяка точка $z \in \overline{\mathbb{C}}$ се съпоставя $z^* \in \overline{\mathbb{C}}$ по следният начин

① $a^* = \infty$, $\infty^* = a$

② ако $z \neq a, \infty$ то z^* е единствената точка за която

а) z и z^* лежат на един лъч с начало a
б) разстоянието от z до a умножено по разстоянието от z^* до a дава R^2 т.е.

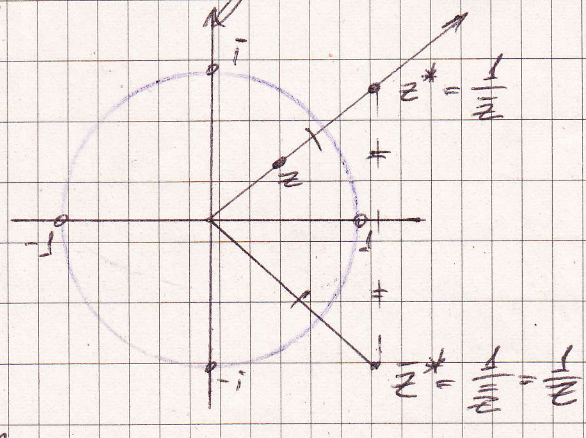
$$|z-a|\cdot|z^*-a| = R^2$$



Нека ДЛФ $\omega(z)$ изобразява обобщената окръжност C_1 в обобщената окръжност C_2. Тогава ако точките z_1 и z_2 са инверсни спрямо C_1 то точките $\omega(z_1)$ и $\omega(z_2)$ са инверсни спрямо C_2

Известна е формулата $z^* = \dfrac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a$

Пример ДЛФ $\omega(z) = \dfrac{1}{z}$ е композиция от инверсия спрямо единичната окръжност и симетрия относно реалната права



Ако z_1, z_2, z_3, z_4 са комплексни числа то тяхно двойно отношение наричаме числото

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

Ако някоя от точките е ∞ то стойностите на двойното отношение се получава с граничен преход. Например

$$(z_1, \infty, z_3, z_4) = \lim_{u \to \infty} (z_1, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$$

5) Съществува единствена ДЛФ която изобразява т. z_1, z_2, z_3 в т. w_1, w_2, w_3 и тя се дава с равенството

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$$