

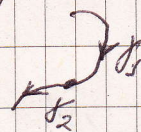
KA

4.12.14

Интегриране в $\mathbb{C}$

$\int \gamma$ съществува, ако γ е ориентирана крива γ (т.е. с кривна дъжка), а f е непрекъсната ф-я γ

$$\int_{\gamma^{-1}} f = - \int_{\gamma} f ; \quad \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$



$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma), \text{ където } M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|,$$

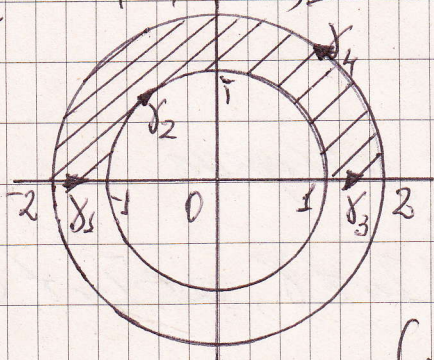
$l(\gamma)$ - дължината на γ

Ако $\gamma: z = z(t)$, $t \in [a, b]$ е частично гладка крива, а $f(z)$ е непрекъсната ф-я γ , то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] dz(t) = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$$

Зад 6.5. Да се пресметне $I = \int_{\gamma} \frac{z}{z} dz$, където γ е контурът на областта

$\{1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$, ориентиран положително



$$I = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$$\gamma_1 = z = t, t \in [-2, -1]$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{z}{z} dz = \int_{-2}^{-1} \frac{t}{t} dt = \int_{-2}^{-1} 1 dt = t \Big|_{-2}^{-1} = -1 - (-2) = 1$$

$$\gamma_2 = z = e^{it}, t \in [0, \pi]$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{z}{z} dz = \int_{\gamma_2} 1 dz = - \int_{\gamma_2} \frac{z}{z} dz = - \int_0^{\pi} \frac{e^{it}}{e^{-it}} de^{it} = - \int_0^{\pi} e^{i2t} de^{it}$$

$$= -\frac{e^{3it}}{3} \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{3} (e^{i3\pi} - 1) = -\frac{1}{3} (-1 - 1) = \frac{2}{3}$$

$$\gamma_3: z = t, t \in [1, 2] \Rightarrow \int_{\gamma_3} \frac{z}{z} dz = \int_1^2 1 dt = t \Big|_1^2 = 1$$

$$\gamma_4: z = 2e^{it}, t \in [0, \pi]$$

$$\int_{\gamma_4} \frac{z}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{2e^{it}}{2e^{-it}} d(2e^{it}) = 2 \int_0^{\pi} e^{2it} d(e^{it}) = \frac{2e^{3it}}{3} \Big|_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{3} (e^{i3\pi} - 1) = -\frac{4}{3}$$

$$\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 1 + 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Основа Теорема Коши

Ано $D \subseteq \mathbb{C}$ е единствена област (т.е. област без граници), $\gamma \subset D$ е затворена крива и $f(z)$ е холоморфна в D , то $\int_{\gamma} f = 0$

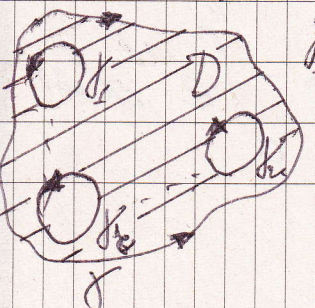


γ - положително ориентирана затворена Жорданова крива

$f(z)$ е холоморфна в $\cup_{a \in \text{Int } \gamma} D$, $a \in \text{Int } \gamma$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - \text{формула на Коши}$$

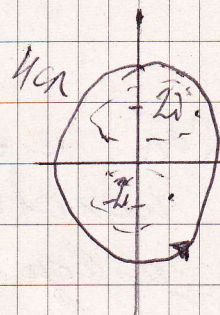
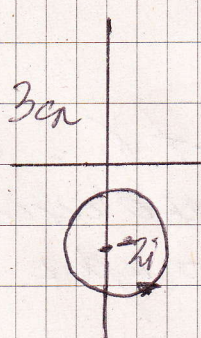
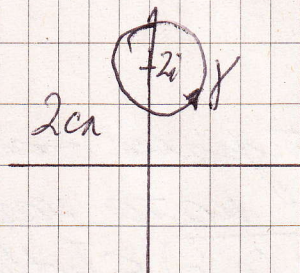
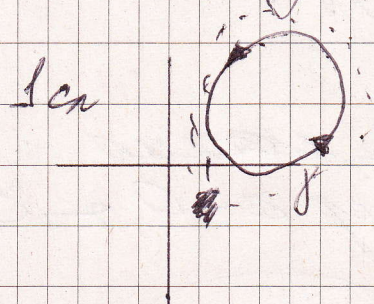
Теорема Коши за сложени контури



$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ - положително ориентирани затворени Жорданови кривки, $f(z)$ е холоморфна в $D \cup \text{Int } D$ - граница на D

$$\text{Тогава } \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \dots + \int_{\gamma_n} f$$

Зад. Пресметнете $T = \int_{\gamma} \frac{1}{z+4} dz$, което γ е положително ориентирана затворена Коранова крива, не минаваща през точките $\pm 2i$



1ca: $T=0$ по очн. Th на Коури

2ca $T = \int_{\gamma} \frac{1}{z+2i} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - (-2i)} dz = 2\pi i \frac{1}{2i + z} \Big|_{z=-2i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$

3ca $T = \int_{\gamma} \frac{1}{z-2i} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - (2i)} dz = 2\pi i \frac{1}{z-2i} \Big|_{z=2i} = -\frac{\pi}{2}$

4ca По Th на Коури за сложени контури

$$\overline{T} = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z+4} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z+4} dz \stackrel{\text{ca 2}}{=} \frac{\pi}{2} \stackrel{\text{ca 3}}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

Зад 18. Нека γ е положително ориентирана затворена Коранова крива, не минаваща през $a \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Покажете че $T = \int_{\gamma} (z-a)^k dz =$
 $\begin{cases} 0, \text{ ако } a \in \text{Ext } \gamma \\ 0, \text{ ако } a \in \text{Int } \gamma, k \neq -1 \\ 2\pi i, \text{ ако } a \in \text{Int } \gamma, k = -1 \end{cases}$

Ако $f \in \text{Int } X$ няма $a \in \text{Ext } X$. По същата лема $\Rightarrow$
 $\int_{\gamma} (z-a)^k dz = 0$



За $a \in \text{Int } X$. Избираме толкова малко
 положително число като параметър $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon$
 удовлетворява чрез $\gamma(a, \varepsilon) \subset \text{Int } X$

По същата лема за сложен контур

$$\Rightarrow \int_{\gamma} (z-a)^k dz = \int_0^{2\pi} (ze^{it})^k d(a + ze^{it})$$

$$= \int_0^{2\pi} z^{k+1} e^{ikt} de^{it} = z^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{ikt} ie^{it} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{z^{k+1} e^{i(k+1)t}}{k+1} dt \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{за } k \neq -1$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i$$