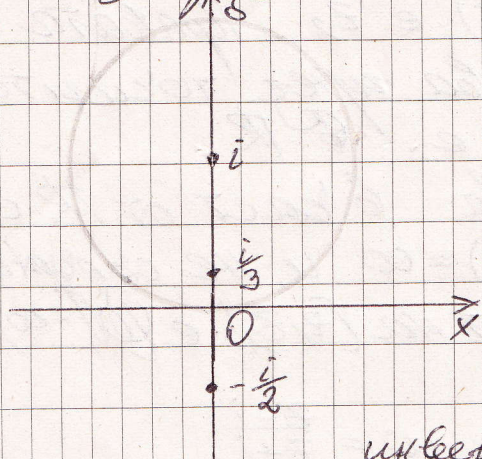


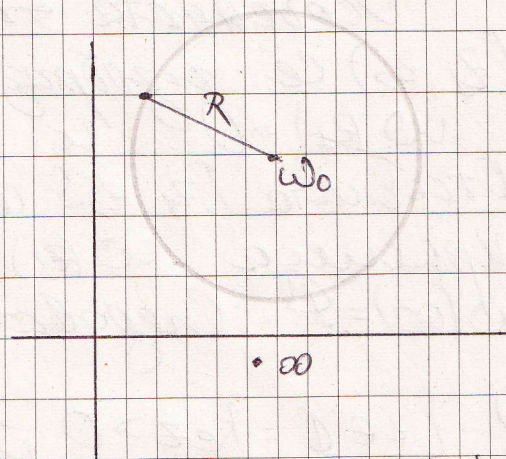
KA

20.11.14

(3.20) в) На се намери центърът и радиусът на окръжността $C(w_0, R)$, в която е подобно линейната функция $w(z) = \frac{3z-2}{2z+i}$ изобразява окръжността $C(i, 1)$



$$w = \frac{3z-2}{2z+i}$$



инверсната точка

на $w(z)$ е $-\frac{i}{2}$ (0 при замъкването)

точките $-\frac{i}{2}$ и $\frac{i}{3}$ са инверсни спрямо окръжността

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} \quad \text{1/ф/на за инверсната точка}$$

$$\left(-\frac{i}{2}\right)^* = \frac{1}{-\frac{i}{2} - i} + i = \frac{1}{-\frac{3}{2}i} + i = \frac{i}{3}$$

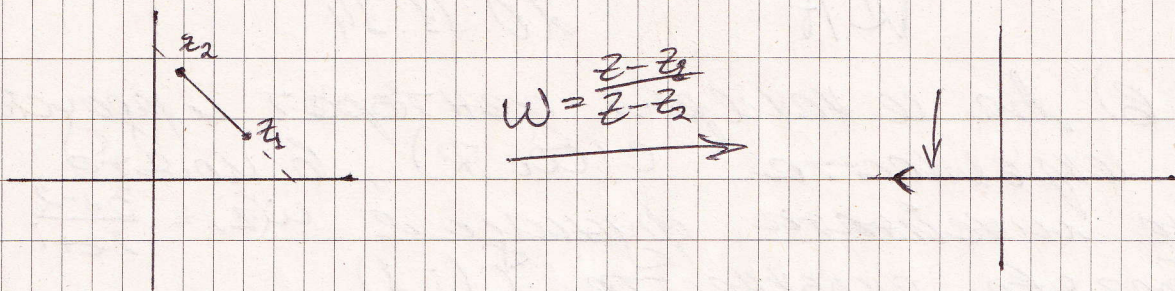
Следователно точките $w(-\frac{i}{2})$ и $w(\frac{i}{3})$ са инверсни спрямо окръжността $C(w_0, R)$

$$\text{Но } w(-\frac{i}{2}) = \infty \Rightarrow w(\frac{i}{3}) = w_0. \text{ Така че } w_0 = w(\frac{i}{3}) = \frac{i-2}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}(1+2i) \text{ - център } - w_0$$

$$R = |w(0) - w_0| = |2i - \frac{3}{5}(1+2i)| = |\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}| = 1$$

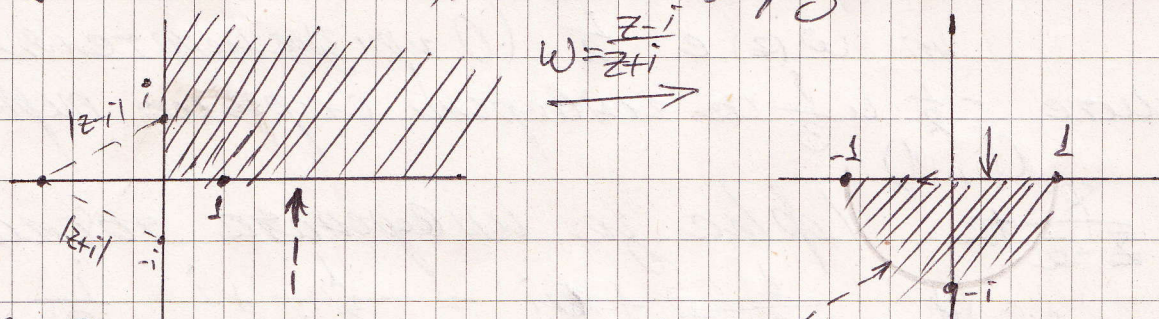
(3.21) На се намери образът на

а) отсечката $[z_1, z_2]$ чрез $w = \frac{z-z_1}{z-z_2}$



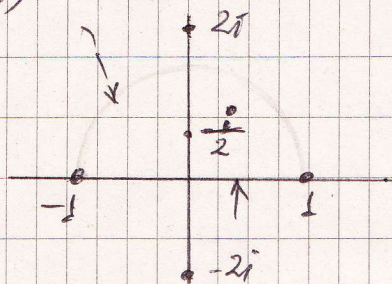
Особенната точка на $w(z)$ е z_2 . Правата (z_1, z_2) се изобразява в права през точките $w(z_1) = 0$ и $w(\infty) = 1$ т.е. $\in \mathbb{R}$. Отсечката $[z_1, z_2]$ се изобразява в част от $\mathbb{R}$ с краищата $w(z_1) = 0$ и $w(z_2) = \infty$ и не съдържа $w(\infty) = 1$. Следователно образът на $[z_1, z_2]$ е $[0, -\infty)$.

б) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ чрез $w = \frac{z-i}{z+i}$

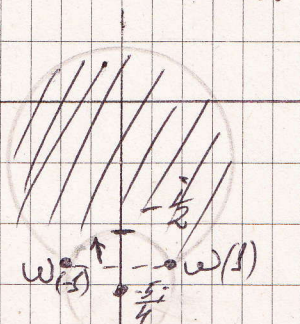


Особенната точка на $w(z)$ е $-i$. Образът на правата $i\mathbb{R}$ е права, минаваща през точките $w(0) = -1$ и $w(\infty) = 1$, т.е. образът на $i\mathbb{R}$ е $\mathbb{R}$. Лъча $[0, +i\infty)$ се изобразява в част от $\mathbb{R}$ с краищата $w(0) = -1$ и $w(\infty) = 1$ и не съдържа $w(-i) = \infty$. Следователно лъчът $[0, +i\infty)$ се изобразява в $[-1, 1]$. Ако $z \in \mathbb{R}$, то $|w(z)| = \frac{|z-i|}{|z+i|} = 1$. Следователно образът на $\mathbb{R}$ е единичната кръжност. Образът на $[0, +i\infty)$ е част от единичната кръжност с краищата $w(0) = -1$ и $w(\infty) = 1$ и съдържаща $w(1) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$. Накрая от единичната кръжност за съответствие на границите намираме образа

! 6) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ чрез $W = \frac{2z-i}{iz+2}$



$$W = \frac{2z-i}{iz+2}$$



В особенната точка на $w(z)$ е $-2i$

Образът на R (права) е окръжност C_1 . Точките $2i$ и $-2i$ са инверсни спрямо R , следователно $w(2i)$ и $w(-2i)$ са инверсни спрямо C_1 . Но $w(2i) = \infty$, следователно $w(-2i) = -\frac{5i}{4}$ е център на C_1 . Освен това C_1 минава през $w(0) = -\frac{1}{2}$.

$$w(1) = \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{5} = \frac{4-4i-1}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$$

$$w(-1) = \frac{-2-i}{-2+i} = -\frac{(2+i)^2}{5} = -\frac{4+4i-1}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$$

Отсечката $(-1, 1)$ се изобразява в част от C_1 с краища $w(-1)$ и $w(1)$ и съдържаща $w(0) = -\frac{1}{2}$. Образът на единичната окръжност е C_2 .

Точките $2i$ и $i/2$ са инверсни спрямо единичната окръжност, следователно точките $w(2i)$ и $w(i/2)$ са инверсни спрямо C_2 . Но $w(2i) = \infty$ следователно $w(i/2) = 0$ е центърът на C_2 .

Освен това точката $w(1)$ лежи на C_2 и $|w(1)| = 1$.

Следователно C_2 е единичната окръжност. Образът на горната единична полуокръжност е част от C_2 с краища $w(-1)$ и $w(1)$ и съдържаща $w(i) = i$.

От $w(i/2) = 0$ намираме базата на областта