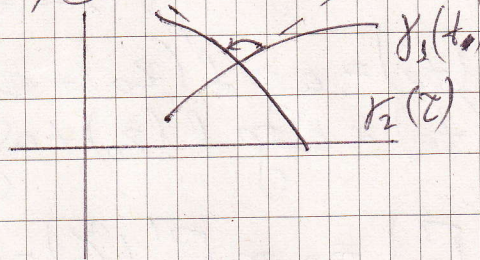
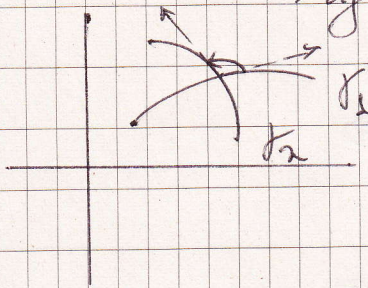


КА Хартмански 24.10.14

Конформни изображения

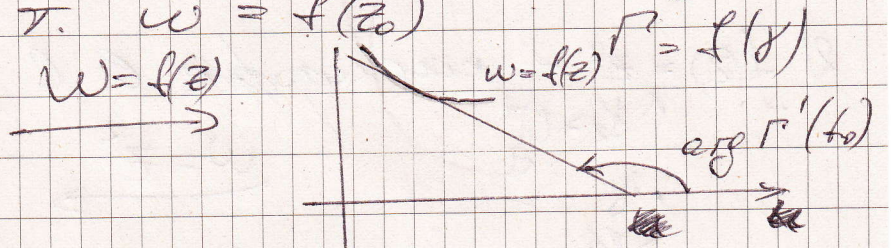
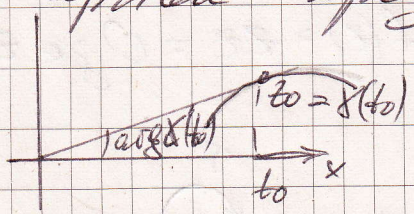
Нека $\gamma_1: z = \gamma_1(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ и $\gamma_2: z = \gamma_2(\tau): [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$
са гладки криви през $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(\tau_0)$



Пред нека f е дефинирана в околност и на $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f \in C^1(U)$. Назваме че изображението $w = f(z)$ е конформно в z_0 ако то запазва ъглите мж гладките криви през z_0, w_0 .
големината и ориентацията

Th Ако f е холоморфна в $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f'(z_0) \neq 0$ то изображението $w = f(z)$ е конформно в z_0
Док

Нека $\gamma: z = \gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ е гладка крива през z_0 . Нека $\Gamma = f(\gamma)$. Тогава Γ е гладка крива през $w_0 = f(z_0)$



Ъгъла който генерира елемента на γ в z_0 съответства с $O_x^+ = \arg \gamma'(t_0)$ а ъгъла който генерира елемента на Γ в $w_0 = f(z_0)$ съответства с $O_w^+ = \arg \Gamma'(t_0)$. Тъй като $\Gamma'(t_0) = [f(\gamma(t_0))]' = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)$ то $\arg \Gamma'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0)$

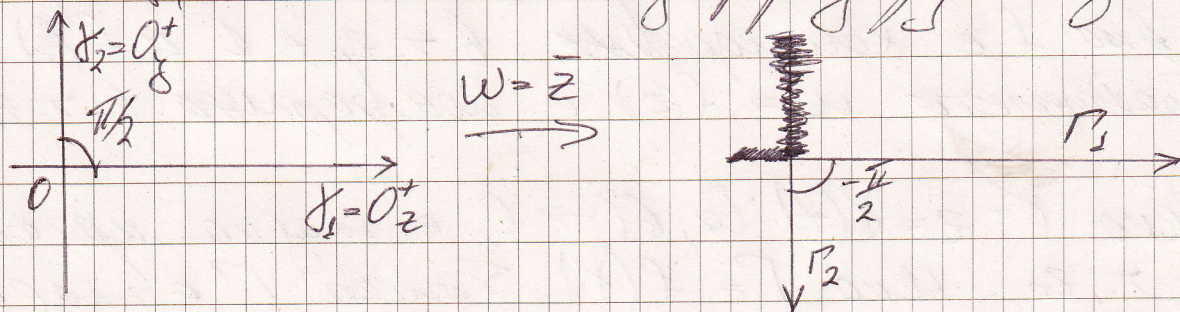
Нека сета γ_1 и γ_2 са магне криве през z_0
 $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$
 Имаме че $\begin{cases} \Gamma_1 = f(\gamma_1) \\ \Gamma_2 = f(\gamma_2) \end{cases}$ т.е.

$$\arg \Gamma_1'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_1'(t_0) \\ \arg \Gamma_2'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_2'(t_0) \Rightarrow$$

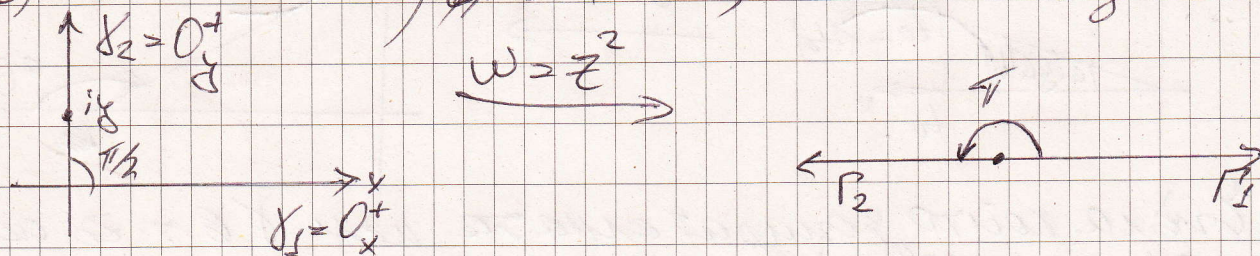
$$\angle (\Gamma_1, \Gamma_2)_{w_0} = \arg \Gamma_2'(z_0) - \arg \Gamma_1'(t_0) = \arg \gamma_2'(t_0) - \arg \gamma_1'(t_0) = \angle (\gamma_1, \gamma_2)_{z_0}$$

Примери (условията холоморфност и $\neq 0$ произведени са съществени)

1) $w = f(z) = \bar{z}$ - не е $\mathbb{C}$ -диференцируема за никакво z



2) $f(z) = z^2$ - холоморфна в $\mathbb{C}$, $f'(z) = 2z = 0$ за $z=0$



Холоморфност и конформност в ∞
 Лемма 1) Нека f е дефинирана в околност $\{z \mid |z| > R\}$ на ∞
 Показваме че f е холоморфна ($w = f(z)$) в ∞ ако
 $f(z) = f(\frac{1}{z})$ е холоморфна в 0

2) Нека f е дефинирана в околност на $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f(z_0) = \infty$. Назовем се изображението $w = f(z)$ е конформно в z_0 ако изображението $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ е конформно в z_0

Линейно - линейна функция (трансформация)

Линейно $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\Delta = ad - bc \neq 0$ ($\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta$)
 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

I. $c=0$, $d=1 \Rightarrow w = T(z) = az+b$ -
 уляна линейна функция (трансформация)

Нека $a = re^{i\varphi}$. Тогава $w = T(z) = re^{i\varphi}z + b$ е
 суперпозиция на следните трансформации

1) $z_1 = e^{i\varphi}z$ - въртене (ротация)

2) $z_2 = rz_1$ - коматетия

3) $w = z_2 + b$ - трансляция

Исно е че уляната линейна трансформация е
 конформно изображение за $\forall z \in \mathbb{C}$. Освен това
 дадените линейно - линейни трансформации
 изобразяват окръжност в окръжност и права
 в права

Ако $T(w) := \infty$, $w = T(z): \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{1:1} \overline{\mathbb{C}}$

II. $c \neq 0$, $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \xrightarrow{1:1} \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$

$$T^{-1} \quad cwz + dw = az + b \Rightarrow cwz - az = -dw + b \Rightarrow$$

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad \Delta = ad - bc \neq 0$$

Алер $T(-\frac{d}{c}) = \infty$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$

Тогача $T: \mathbb{C} \xrightarrow{1:1} \mathbb{C}$

ТБ Групова св-во на Арбидо-линейните трансформации
 ИЛТ е група относно композицията

$S.T = S(T)(S_0.T)/S \text{ сюрт}$
 $I = id_{\mathbb{C}}$, $T = \frac{az+b}{cz+d}$, $T^{-1} = \frac{-d\omega+b}{c\omega-a}$

$\Delta_{ST} = \Delta_S \Delta_T$

$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right\} = GL(2, \mathbb{C})$ също е група

ТБ изображението $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$: $\mathbb{C} \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}$
 е конформно $\forall z \in \bar{\mathbb{C}}$

Прек

1) $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$
 $T'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{a}{(cz+d)^2} \neq 0$ за $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$

2) а) конформност в ∞ ($c \neq 0$)

$F(z) = T\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{a}{z} + b}{\frac{c}{z} + d} = \frac{bz + a}{dz + c}$

$F'(z) = \frac{b(dz+c) - d(bz+a)}{(dz+c)^2} = \frac{bc - da}{(dz+c)^2} = \frac{-\Delta}{(dz+c)^2}$

$F'(0) = \frac{-\Delta}{c^2} \neq 0$

2) б) аналогично за $z = -\frac{d}{c}$

Тв (кръгово св-во) Лобно-линейните трансформации изобразяват окръжност в $\bar{C}$ в окръжност в $\bar{C}$

Лок 1) Разлагане на общата ЛЛТ:

$$\frac{az+b}{cz+d} \Bigg| \frac{cz+d}{a} \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{-d}{c}}{cz+d}!$$

$$\frac{-az + \frac{ad}{c}}{b - \frac{cd}{c}} \Bigg| \frac{a}{c}$$

$$\frac{-d}{c}$$

$\Rightarrow$ ЛЛТ е композиция на следните трансформации

$$z_1 = cz+d \quad \text{— ЛЛТ}$$

$$z_2 = \frac{1}{z_1} \quad w = -\frac{d}{c} - z_2 + \frac{a}{c} \quad \text{— ЛЛТ}$$

Достатъчно е да докажем че $\frac{1}{z} = w$ изобразява окръжност в окръжност (в $\bar{C}$)

Нека C е окръжност с декартово уравнение

$$a(x^2+y^2) + b_1x + b_2y + c = 0$$

Имаме че $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ а $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $x^2+y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$

Тогава $\tilde{C}: a|z|^2 + \frac{b_1}{2}(z+\bar{z}) + \frac{b_2}{2i}(z-\bar{z}) + c = 0$

$$\textcircled{1} \quad a|z|^2 + \frac{\overbrace{b_1 - ib_2}}{2} z + \frac{\overbrace{b_1 + ib_2}}{2} \bar{z} + c = 0 \Rightarrow$$

$$a|z|^2 + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}$$

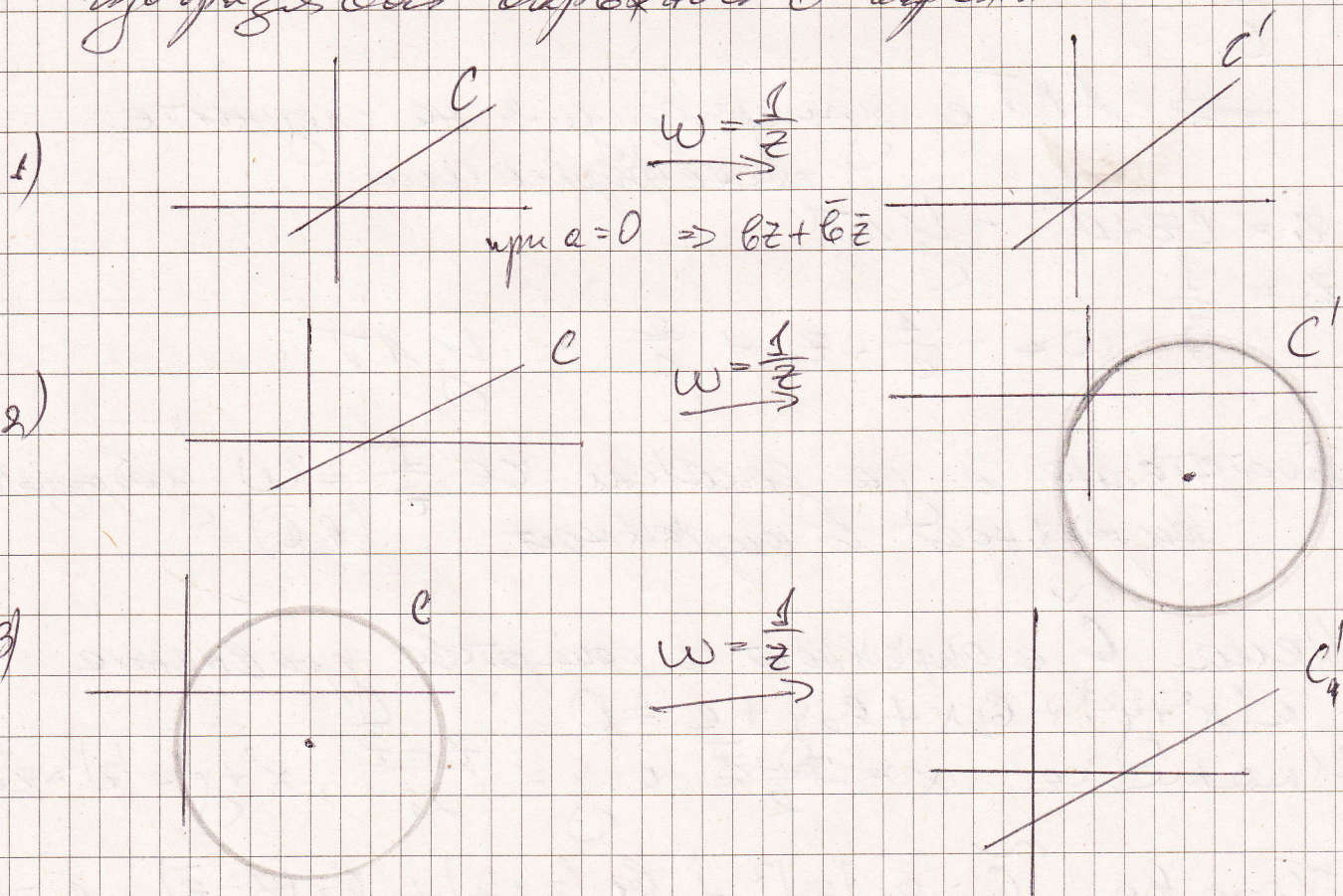
линейное уравнение в комплексном виде

Положим $w = \frac{1}{z}$ т.е. $z = \frac{1}{w}$, заменим в $\textcircled{1} \Rightarrow$

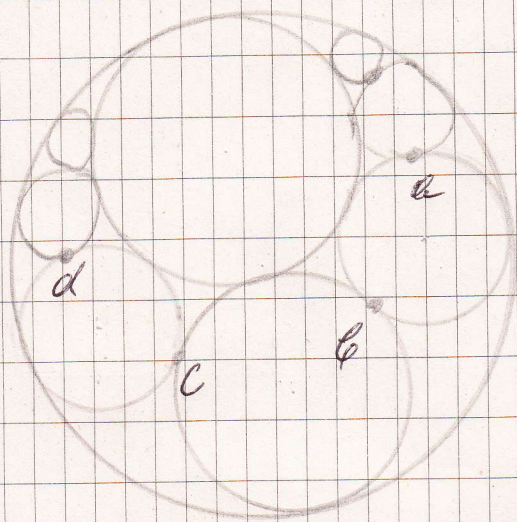
$$\frac{a}{|w|^2} + \frac{b}{\frac{1}{w}} + \frac{\bar{b}}{\bar{w}} + c = 0 \quad / \quad |w|^2 = w\bar{w} \rightarrow$$

$$c|w|^2 + \bar{b}w + b\bar{w} + a = 0 - \text{как окружность}$$

Средством $w = \frac{1}{z}$ отсюда и $w = \sqrt{z}$
изобразим окружность в окружность

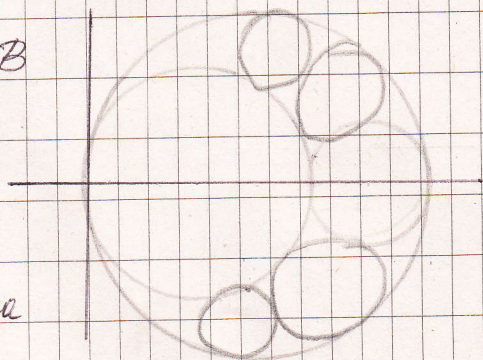


ЕДНА ПАРНИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА



a, b, c, d лежат на
одна окружность

$$z_1 = Az + B$$



симметрия

$$w = \frac{z}{z+1}$$

