

КА Хаджийев

21.10.14

Връзка между холоморфните функции и хармоничните функции

Лемма. Нека $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ е отворено мн-во.
Функцията $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ се нарича хармонична
ако $f \in C^2(\Omega)$ (непрерывна частта изглеждат в 2)

Лемма $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$

Тв. Ако $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$, и u и v имат непрекъснати частни производни до 2-ри ред включително, то u и v са хармонични функции
и-во

Тей като f е холоморфна в D , то f удовлетворява Коши-Риманови (CR) т.е.

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Оттук диференцирайки
двете страни на равенствата, първото по x а второто по y $\Rightarrow$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \Rightarrow$$

u е хармонична в D

Аналогично следва $\Delta v = 0$

Формален изход към $\mathbb{C}$ -диференцируемост

Нека f е $\mathbb{R}$ -диференцируема в околност
и на $z_0 \in \mathbb{C}$ т.е. $\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + o(\Delta z)$
 $z \in \mathbb{C}$

$$|xy| = (z\bar{z}), \quad x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta z + \Delta \bar{z}}{2}, \quad \Delta y = \frac{\Delta z - \Delta \bar{z}}{2i}$$

Заместваме

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_x \frac{1}{2} (\Delta z + \Delta \bar{z}) + f_y \frac{1}{2i} (\Delta z - \Delta \bar{z}) + o(\Delta z) = \\ &= \frac{1}{2} (f_x - i f_y) \Delta z + \frac{1}{2} (f_x + i f_y) \Delta \bar{z} + o(\Delta z) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \end{aligned}$$

Вед операторите $\partial, \bar{\partial}$

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z}$$

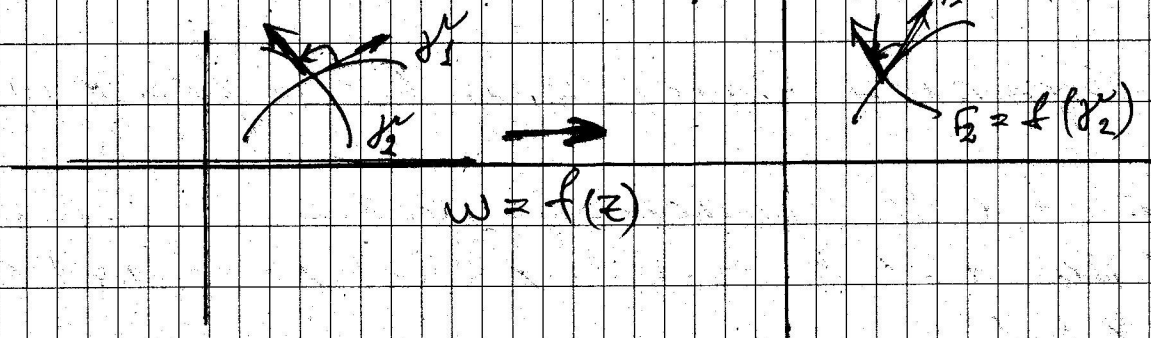
Зог не се докаже че

$$\Delta f = 4 \partial \bar{\partial} f \quad (\Delta f = f_{xx} + f_{yy})$$

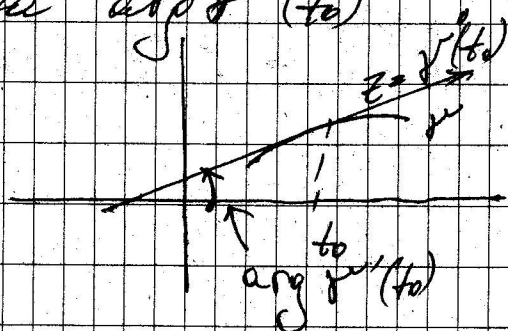
(составената от деривативите)

каковото изображение

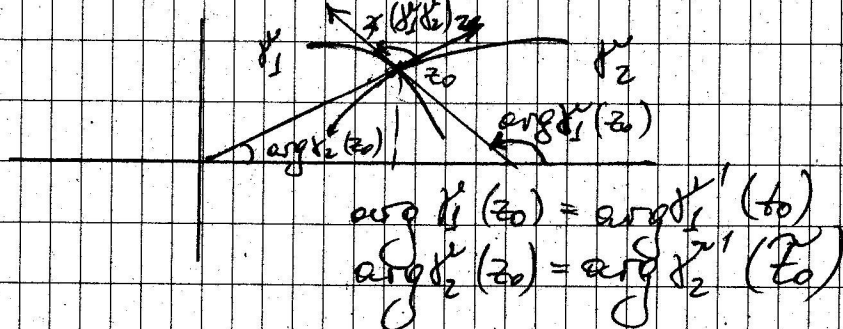
$$w = f(z) : D \rightarrow \mathbb{C}$$



Def Нека $\gamma: z = \gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ е крива в $\mathbb{C}$.
 Назваме се γ гладка ако $\exists \gamma'(t)$ непрекъснат
 в $[a, b]$ и $\gamma'(t) \neq 0$ за $\forall t \in [a, b]$.
 Ако γ е гладка крива то за $\forall t_0 \in [a, b]$, в т. $z_0 = \gamma(t_0)$
 $\exists$ допирателна към γ и тя съдържа дъга $\in O_x$
 равна на $\arg \gamma'(t_0)$

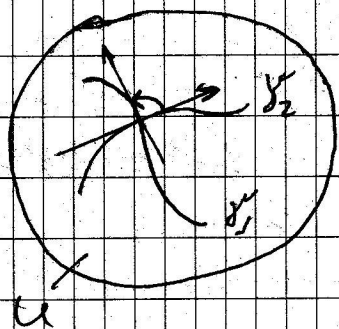


Def Нека $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ и $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ са
 гладки кривы през т. $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$.
 ъгъл между γ_1 и γ_2 в т. z_0 се разбира ъгъл
 между допирателните към γ_1 и γ_2 в т. z_0 ,
 ориентиран от допирателната към γ_2 , към
 допирателната към γ_1



$$\angle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0} = \arg \gamma_1'(t_0) - \arg \gamma_2'(t_0)$$

Def Нека f е диференцируема в околност
 и на z_0 . Назваме се изображението $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ е
 конформно в т. z_0 , ако f запазва ъглите
 между гладките кривы през z_0
 (! $f \in C^1(U)$)

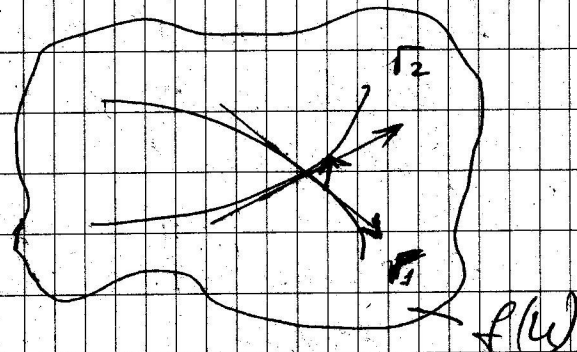


$$w = f(z)$$

$$\xrightarrow{\quad}$$

$$\Gamma_1 = f(z_1)$$

$$\Gamma_2 = f(z_2)$$



$$\star (\Gamma_1 \Gamma_2)_{w_0} = \star (z_1 z_2)_{z_0}$$