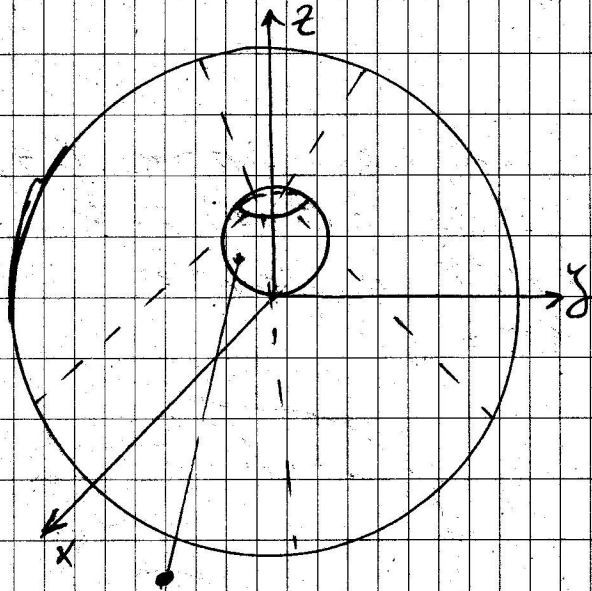


КА лекция 20.10.14

Топология в $\mathbb{C}$ - комплексната равнина



Def Околност на
безкрайна точка се
нарича $\{ |t| > R \} \cup \{ \infty \}$, $R > 0$

T_h (Болцано-Вайерштрасс в $\mathbb{C}$)
Всяка редица от точки
 $\{ z_n \in \mathbb{C} \}$ или точка на
свободен

Def Всяко затворено подмножество
 $F \subseteq \mathbb{C}$ се нарича компакт (в $\mathbb{C}$). В
частност $\mathbb{C}$ е компакт

Функции на комплексна променлива

$$M \subseteq \mathbb{C}, \omega = f(z) : M \rightarrow \mathbb{C}$$

$z \rightarrow \arg z$, $z \rightarrow \sqrt{z}$ {многозначни функции}

$$z = (x, y) = x + iy$$

$$\omega = f(z) = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \Rightarrow \omega = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

Пример

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + i 2xy$$

$$g(x, y) = x^2 - y^2 - i 2xy$$

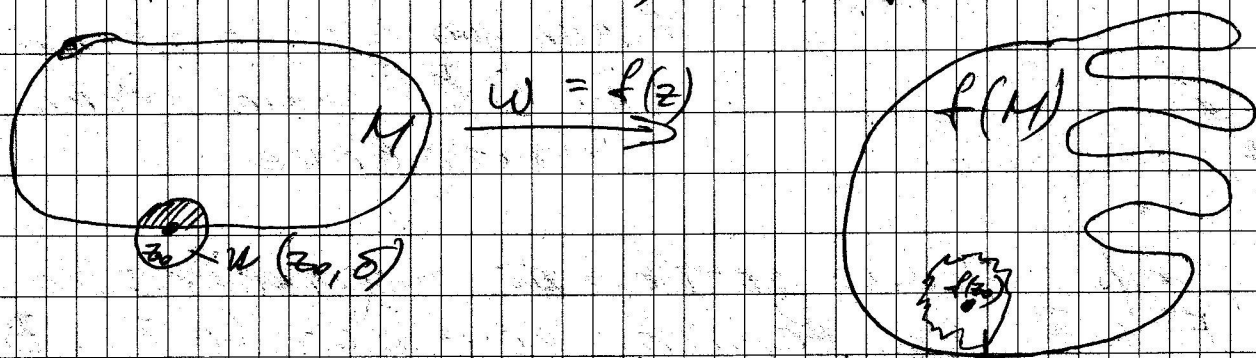
$$f(x, y) = (x + iy)^2 = z^2 !$$

$$g(x, y) = \varphi(z, \bar{z})$$

Непрерывность

$$f: M \rightarrow \mathbb{C}$$

Def 1. Функцията f е непрерывна в т. $z_0 \in M$, ако за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(z_0, \varepsilon)$ т. е.
 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, за $\forall z \in M$ за които
 $|z - z_0| < \delta$, $w = f(z)$



$$f(U(z_0, \delta) \cap M) \subseteq U(f(z_0), \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

Def 2. Эквивалентна на Def 1

Ако z_0 е точка на събиране на M , f е непрерывна в z_0 ако $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Def 3. $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ е равномерно непрерывна ако за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, т. е.

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon, \text{ за } \forall z_1, z_2 \in M, \text{ за които } |z_1 - z_2| < \delta$$

Th. Нека $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ е непрерывна в M

1) Ако M е компактен, то $f(M)$ също е компактен

2) Ако M е свързано мн-во, то $f(M)$ също е свързано мн.

3) Ако M е компактен, то f е равномерно непрерывна

4) Ако M е компактен, то $\exists$ т. $z_1, z_2 \in M$ т. е.

$$|f(z)| = \max_M |f(z)| \text{ и } |f(z)| = \min_M |f(z)|$$

Комплексно дифференцируемое

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ и f е дефинирана в околност z_0

Говорим, че f е комплексно дифференцируема (с-дифференцируема) в z_0 ако $\exists$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

$$h = \Delta z := z - z_0, \quad \Delta f = f(z) - f(z_0)$$
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

$$\alpha(\Delta z) = \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \Rightarrow \Delta f = f'(z_0) \Delta z + \alpha(\Delta z),$$

f е с-диф-на $z \in \mathbb{C}, \alpha(\Delta z) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$

- 1) Ако f е с-дифференцируема то f непрекъсната в z_0
- 2) Обратно не е вярно. Пример $f(z) = \bar{z} = x - iy$

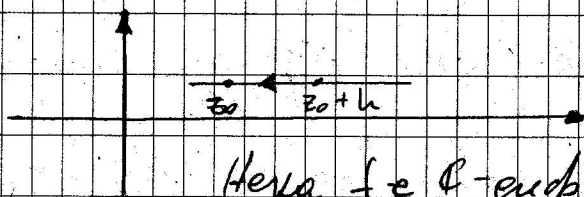
$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \begin{cases} 1 & \text{при } \Delta z \in \mathbb{R} \\ -1 & \text{при } \Delta z \in i\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

Не $\exists \lim_{\Delta z} \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} \Rightarrow f(z) = \bar{z}$ не е с-дифер-на за никакво $z \in \mathbb{C}$

Уравнение (условие) на Коши-Рисман

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

1)



$$h \rightarrow 0$$

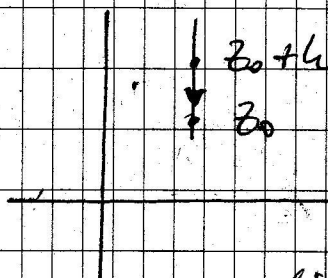
$$h \in \mathbb{R}$$

Нека $f \in \mathbb{C}$ -функ-ция в z_0 , $z_0 = x_0 + iy_0$

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

2)



$$h = ik, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h = ik}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ik) - f(z_0)}{ik} = \frac{1}{i} \lim_{k \in \mathbb{R}} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{Следва от това, че ако } f \in \mathbb{C}\text{-функ-ция}$$

$$\text{в } z_0 \text{ то } \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) =$$

$$-i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \Leftrightarrow \text{CR } \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

Пример

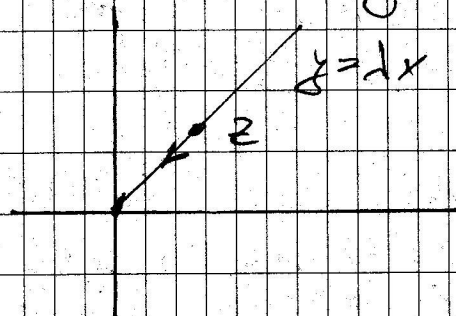
$$f(z) = \bar{z} = x - iy, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -i$$

$$\text{но CR: } 1 + i(-i) = 2 \neq 0 \quad \text{т.е.}$$

Условието CR не е изпълнено за $\mathbb{C}$ -функ-ция

$$\text{Пример } f(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0) \Rightarrow f \text{ удовлетворяет CR}$$



$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ y = \lambda x}} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ y = \lambda x}} \frac{f(z)}{z} =$$

$$= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ y = \lambda x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x^2}{(1 + \lambda^2)x^2} =$$

$$= \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \text{ - зависит от } \lambda! \Rightarrow f \notin \text{CR в } 0$$

Означим $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

$$\text{CR: } f_x + i f_y = 0$$

$$f = u + iv, \quad f_x = u_x + i v_x, \quad f_y = u_y + i v_y, \quad f_x + i f_y = 0$$

$$\Leftrightarrow u_x + i v_x + i(u_y + i v_y) = 0 \Leftrightarrow u_x - v_y + i(v_x + u_y) = 0$$

$$\text{CR} \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Лемма Неймана $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$ и ее дифференцируемость в z_0 , эквивалентна f реально дифференцируема ($\mathbb{R}$ -диф) в z_0 , а u и v дифференцируемы в $z_0 = (x_0, y_0) \Leftrightarrow \exists$ т.кажд. $a, b \in \mathbb{C}$ и функция $\beta(\Delta z) \rightarrow 0$.

$$\Delta f = a \Delta x + b \Delta y + \Delta z \beta(\Delta z), \quad a = f_x, \quad b = f_y$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \beta(\Delta z) = 0$$

Тв. Ако f_x, f_y непрекъснати в z_0 , то f е $\mathbb{R}$ -диф-ма в z_0

Th f е $\mathbb{C}$ -диф-ма в т. $z_0 \Leftrightarrow f$ е $\mathbb{R}$ -диф-ма в т. z_0 и удовлетворява CR т.е. $f_x + i f_y = 0$ (в z_0)
 Док-во

$\rightarrow$ Нека f е $\mathbb{C}$ -диф-ма в z_0 . Тогава $\Delta f = f'(z_0) \Delta z + o(|\Delta z|)$
 $\Delta z = \Delta x + i \Delta y \Rightarrow f'(z_0) \Delta x + i f'(z_0) \Delta y + o(|\Delta z|)$
 за $\alpha(\Delta z) \Delta z \rightarrow 0$ т.е. f е $\mathbb{R}$ -диф-ма в z_0 и
 $f_x + i f_y = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f'(z_0) + i(i f''(z_0))}{1} = f'(z_0) - f'(z_0) = 0$ CR

$\leftarrow$ Нека f е $\mathbb{R}$ -диф-ма в т. z_0 т.е.

$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \Delta z \beta(\Delta z)$ за $\beta(\Delta z) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$ и
 $f_x + i f_y = 0 \Leftrightarrow f_y = -i f_x$ Тогава
 $\Delta f = f_x \Delta x + i f_x \Delta y + \Delta z \beta(\Delta z) = f_x \Delta z + \Delta z \beta(\Delta z)$ т.е.

f е $\mathbb{C}$ -диф-ма в т. z_0 и $f'(z_0) = f_x(z_0) = -i f_y(z_0)$

Следствие

Ако f има непрекъснати частни производни в z_0 и $f_x + i f_y = 0$ в z_0 то f е $\mathbb{C}$ -диф-ма

Бед

f е конформна в т. z_0 Ако f е $\mathbb{C}$ -диф-ма в околност на z_0

Ако D е област, $z \in D$ и f е конформна във всяка точка на D , казваме че f е конформна в D