

ЛА Хаджитски 19.01.15

Приложение на Тн за функциите

1. сформирание на редове с бинарни масф-ти

Заг $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$. Ако $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, |z| < R$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_c} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \gamma_c = \{|z| = c\}, c < R$$

Нека $f(z) = (1+z)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} z + \dots + \binom{2n}{n} z^n + \dots + z^{2n}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_c} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz, 0 < c < \infty \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_c} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} \frac{1}{5^n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_c} \frac{(1+z)^{2n}}{5^n z} dz$$

$$c: \left| \frac{(1+z)^2}{5z} \right| < 1 \text{ (избираме } c \text{ по този начин)}$$

$$\text{За } |z|=1 \Rightarrow |1+z|^2 \leq (1+|z|)^2 \leq (1+1)^2 = 4 < 5|z|$$

Така при $c=1$, можем да разменим реда на сумирането и интегрирането

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left[\frac{(1+z)^2}{5z} \right]^n \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(1+z)^2}{5z} \right]^n \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - \frac{(1+z)^2}{5z}} \frac{dz}{z}$$

Взنامه само $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ (от условия $|z|=1$)

$$\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Res} \left(f, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{(-z^2+3z-1)'|_{z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{1}{-2z+3} \Big|_{z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}} =$$

$$\frac{1}{-2z+3} \Big|_{z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{-3+\sqrt{5}+3} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow I = \sqrt{5}$$

Тогда логарифмический индикатор: Нека δ е дъг в орта на хордана крива, f е холоморфа в окоността на $\gamma \cup \text{Int } \delta$ с изключение на краен брой полюси и $f(z) \neq 0$, $z \in \delta$. Тогава $\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f$

Обобщение на Тъза логарифмический индикатор

При същите условия за δ и f , ако $g(z)$ е холоморфа в окоността на $\gamma \cup \text{Int } \delta$, с изключение на краен брой полюси то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) dz = \sum_{k=1}^n g(a_k) - \sum_{k=1}^p g(b_k) + \sum_{k=1}^q \operatorname{Res}(g, c_k)$$

където a_k са нулите на f , b_k - полюсите на f в $\text{Int } \delta$, а c_k са полюсите на g в $\text{Int } \delta$