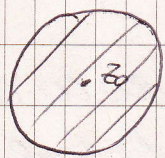


Основна ТН на Коши
 Деф DCC е едносвързана, ако $\bar{D}$ е
 свързано множество

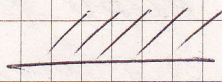
Примери

① $K(z_0, R)$



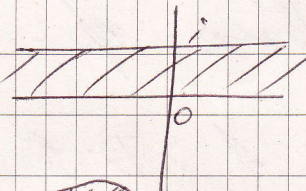
едносвързана област

② $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$



едносвързана област

③ $\{0 \leq \text{Im } z < 1\}$



едносвързана област

④ $\{1 < |z| < 2\}$



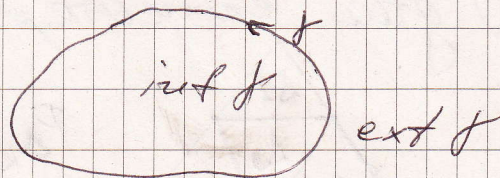
не е едносвързана

ТН (Хордан)

DCC е едносвързана $\Leftrightarrow$

за всяка затворена Хорданова крива $\gamma \subset \bar{D} \Rightarrow$
 $\text{int } \gamma \subset D$

$\bar{D} = \text{int } \gamma \cup \gamma \cup \text{ext } \gamma$
 $(\infty \in \text{ext } \gamma)$



Первоначален вариант на ТН (Коши, 1825г.)

ТН (Грийн - Остроградски) - Нека γ е затворена
 частично гладка Хорданова крива с вътрешност
 $\text{int } \gamma = D$ и $P(x, y), Q(x, y)$ са имат непрекъснати
 частични производни в откритостта на $\bar{D}$. Тогава

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

Нека $f \in C^1(\bar{D})$ и $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

имаме че $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + i v)(dx + i dy)$

$$\int_{\gamma} u dx + v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy \stackrel{\text{ТН (140)}}{\overline{CR}} \iint_D (-v_x - u_y) dx dy +$$

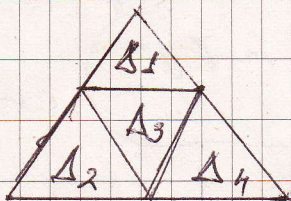
$$i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0$$

T_1 (Коши. Первоначален вариант) Ако $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана област, то $\int_{\gamma} f = 0$, $\forall$ затворена Хордкова крива $\gamma \subset D$ и $\forall$ $z_0 \in D$ $f \in C^1(D)$

T_2 (Коши-Гурса) (класическа форма, 1838)
Ако $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана област, то $\int_{\gamma} f = 0$ за $\forall$ затворена крива $\gamma \subset D$ и $\forall$ холоморфна $sp.-a$ в D

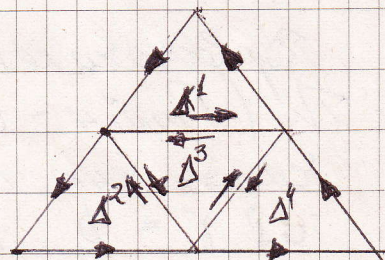
Ако Δ е триъгълник, D -то за $\gamma = \partial \Delta$ - триъг., контур
Ако Δ е триъгълник

- 1) Озч $\Delta \subset D$ - затворен триъгълник ($\Delta = \bar{\Delta}$)
 $d(\Delta)$ - диаметър на Δ , P_{Δ} - периметър на Δ
- 2) два елементарни геом. факта: $d(\Delta) < P_{\Delta}$



$$P_{\Delta_k} = \frac{1}{2} P_{\Delta}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

- 3) Нека $\alpha = \int_{\partial \Delta} f(z) dz$ и да разделим



Δ чрез връзките отсески на 4-ти триъгълника $\Rightarrow \Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$. Тогава
 $\alpha = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial \Delta_i^k} f(z) dz$. От неравенството

на триъгълника $\Rightarrow |\alpha| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\partial \Delta_k^k} f(z) dz \right|$. Нека

с Δ_1 да означим един от $\{\Delta_k^k\}_1^4$ за който

$$\left| \int_{\partial \Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} |\alpha|. \text{ Разделяме } \Delta_1 \text{ чрез}$$

средните стойности и избора на Δ_2 т.е.

$$\left| \int_{\partial \Delta_2} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial \Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^2} |\alpha|$$

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \supset \Delta_n$$

$$P_{\Delta_n} = \frac{1}{2^n} P_{\Delta_1}, \quad d(\Delta_n) < P_n = \frac{1}{2^n} P_{\Delta_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(*) \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^n} |\alpha|, \quad n = 1, 2, \dots$$

От Тн на Кантор $\Rightarrow \exists! z_0 \in \Delta_n, n = 1, 2, \dots$
 Т.е. $*$ е едносвързана крива и $\gamma = \partial \Delta$ е
 затворена Жорданова крива то $\Delta \subset D \Rightarrow z_0 \in D$
 Т.к. f е холоморфна в D то в окрестност на
 z_0 , f има следното представяне

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0) \varepsilon(z, z_0)$$

$$\varepsilon(z, z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0. \text{ Това означава че } \forall \varepsilon > 0 \exists$$

$$\delta \text{ т.е. } |\varepsilon(z, z_0)| < \varepsilon, \quad \forall z \in D \text{ за което}$$

$$|z - z_0| < \delta. \text{ ПоHEME } d(\Delta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ то } \exists n_0$$

$$\text{т.е. } \exists n > n_0 \Rightarrow \Delta_n \subset K(z_0, \delta). \text{ Имаме че}$$

$$\text{за } \forall n > n_0 \quad \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0) \varepsilon(z, z_0) dz \right|$$

$$= \left| \underbrace{\int_{\partial \Delta_n} f(z_0) dz}_0 + \underbrace{f'(z_0) \int_{\partial \Delta_n} (z - z_0) dz}_0 + \int_{\partial \Delta_n} (z - z_0) \varepsilon(z, z_0) dz \right| =$$

$$> \left| \int_{\partial \Delta_n} (z - z_0) \varepsilon(z, z_0) dz \right| \leq \int_{\partial \Delta_n} |z - z_0| |\varepsilon(z, z_0)| |dz| < P_{\Delta_n} \varepsilon$$

$$= \varepsilon \left(\frac{P_{\Delta_1}}{2^n} \right)^2$$

$$\text{Оттук и от } (*) \Rightarrow \frac{1}{4^n} |\alpha| = \epsilon \left(\frac{P_\Delta}{2^n} \right)^2 \Rightarrow$$

$$|\alpha| \leq \epsilon P_\Delta^2 \Rightarrow \alpha = 0$$

Еквивалентна формулировка на Th на Коши

Th1 Ако $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана област то
 $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ за $\forall$ крива $\gamma_1, \gamma_2 \in D$ с общи
 начало и край, и за $\forall f$ холоморфна
 в D

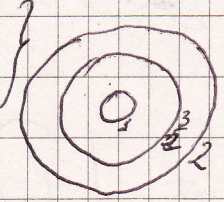
Th2 Ако D е едносвързана област в $\mathbb{C}$, то $\forall$
 холоморфна в D функция има примитивна

Следствие

$\square$ Във всяка едносвързана област $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$
 може да се отреди единствен мном на $\log z$
~~е~~ $F(z) + C = z \Rightarrow F(z) + C = \log z !$

Теорем на Коши не е вярна за не едносвързана обл

Пр $D = \{1 < |z| < 2\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $\gamma = \{|z| = \frac{3}{2}\}$



Th 3 (Коши) Ако D е Карданова област
 (∂D - затворена Карданова крива) и f е
 холоморфна на $\bar{D}$ то $\int_{\partial D} f = 0$