

КА Хаджийски

15.12.14.

Изолрани особени точки. Тн на Риман и на Сохоуки. Изолрати - Вајерштрас

Def. $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолрана особена точка на f ако f е холоморфна в прокопсена околност $K'(z_0, R) = \{0 < |z - z_0| < R\}$ на z_0 . Тогав $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ (Лоран)

Def. 1) z_0 - отстранима а.т., ако $a_{-n} = 0, \forall n \geq 1$
 2) z_0 - m -кратен полна на f , ако $a_{-n} \neq 0, a_{-m} = 0, \forall n > m$
 Тогав $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$
 При $m=1$ - z_0 е прост полна
 3) z_0 - съществена особена точка на f ако $a_n \neq 0$ за безброј много n

Th. Нека z_0 е отстранима а.т. на f . Всека е T_n (Риман). Нека f е холоморфна во прокопсена околност с радиус R т.е. $\{0 < |z - z_0| < R\}$
 Следните твврдения се еквивалентни
 1) z_0 е отстранима а.т. на R
 2) $\exists$ функција $g(z)$ - холоморфна во $|z - z_0| < R$ т.е. $f(z) \equiv g(z), 0 < |z - z_0| < R$
 3) $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
 4) $|f(z)|$ е ограничена во прокопсена околност на z_0 т.е. $\exists M \geq 0, R_1 \leq R$ т.е. $|f(z)| \leq M, 0 < |z - z_0| < R_1$

Proof $1 \Rightarrow 2$ По Def $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$
 $0 < |z - z_0| < R, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ е сепе неа
 по $0 < R_1 \leq R \Rightarrow g(z)$ е холоморфна во $|z - z_0| < R$ и $g(z) \equiv f(z), 0 < |z - z_0| < R$

$$f(z) := a_0 = f(z_0) \Rightarrow f \text{ е холоморфна в } |z - z_0| < R$$

$$2 \Rightarrow 3 \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$$

$$3 \Rightarrow 4 \quad \text{Лемо е (зреници на функцията)}$$

$$4 \Rightarrow 1 \quad (\text{с неравенство на Коши на коефициентите})$$

$$\forall n \quad |a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad \forall 0 < r < R, \quad n = 1, 2, \dots \text{ т.е. } |a_n| \leq M r^n. \text{ Оттук при } r \rightarrow 0 \Rightarrow a_n = 0 \text{ за } n = 1, 2, \dots \text{ и } z_0 \text{ е отстранена н. т.}$$

I z_0 е полюс на f

Th2 Нека f е холоморфна в $0 < |z - z_0| < R$

Следните твърдения са еквивалентни

1) z_0 е m -кратен полюс на f

2) $\exists$ функция $g(z)$ - холоморфна в $|z - z_0| < R$
 $f(z_0) \neq 0$ т.е. $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad 0 < |z - z_0| < R$

3) z_0 е m -кратна нула на $1/f$

$$\text{Док } 1 \Rightarrow 2 \quad \text{Разгр. } (z - z_0)^m f(z) = \\ = (z - z_0)^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} \right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{m+n} + a_{-m} + a_{-(m-1)} + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{m-1}$$

$$f(z) \text{ е холоморфна в } |z - z_0| < R, \quad f(z_0) = a_{-m} \neq 0$$

$$2 \Rightarrow 3 \quad \forall z: 0 < |z - z_0| < R \Rightarrow \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \frac{1}{f(z)}, \quad f(z) \neq 0$$

от непрекъснатостта $\Rightarrow \exists R_1 \leq R$ т.е. $f(z) \neq 0$

$$\text{за } \forall z: |z - z_0| < R_1 \Rightarrow \frac{1}{f(z)} \text{ е холоморфна в } |z - z_0| < R_1$$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0) g(z), \quad \left(g(z) \neq \frac{1}{f(z)} \right), \quad g(z) \text{ e}$$

голоморфна и $\neq 0$ в ок на $z_0 \Rightarrow$
 z_0 е m -кратна нула на $f(z)$

3 $\Rightarrow$ 1 По ука $\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \psi(z)$, където
 $\psi(z)$ е голоморфна и $\neq 0$ в ок на z_0 . Тогава
 $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m \psi(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \frac{1}{\psi(z)}$
 $\frac{1}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_0}{(z-z_0)^0} + \frac{a_1}{(z-z_0)^1} + \dots$

$\Rightarrow z_0$ е m -кратен полюс на f

Следствие

$$z_0 \text{ е полюс на } f \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$$

Дока $\rightarrow$

от 2) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \psi(z)$, $\psi(z) \neq 0 \Rightarrow$
 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|\psi(z)|}{|z-z_0|^m} = +\infty$

II z_0 е съществена особенна точка на f

Th 3 (Сохуи - Уодарти - Вайерштрас)

Нека $f(z)$ е прокусена в $0 < |z-z_0| < R$

Следните твърдения са еквивалентни

- 1) z_0 - съществена особенна точка на f
- 2) за R прокусена околност $U = \{0 < |z-z_0| < R, R \leq R\}$
 $f(U)$ е навсякъде гъсто в $\mathbb{C}$ т.е. за $\forall \omega \in \mathbb{C}$
 $\exists \{z_n\}, z_n \rightarrow z_0$ т.е. $\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = \omega$

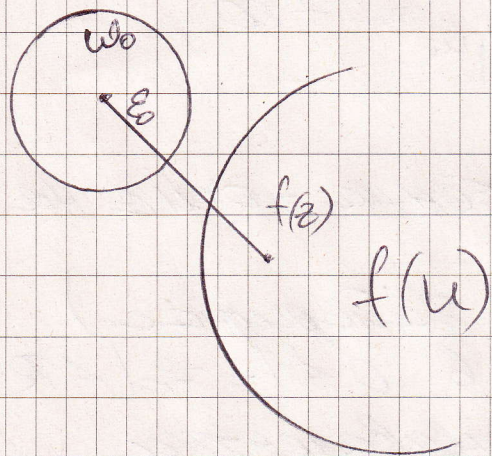
3) $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

Ако $(B \subset A$ е навсякогда гъсто в A , ако $\bar{B} = A$ т.е. всяка точка на A е или точка на B или е точка на състояването на B)

Пример: $\mathbb{Q}$ е навсякогда гъсто в $\mathbb{R}$

$1 \rightarrow 2$, $w = \infty$, Тей като z_0 не е особенна точка на f , то $|f(z)|$ не е ограничена в някоя прокутава околност на z_0 , Това означава че $\exists z_1: 0 < |z_1 - z_0| < R_1$ т.е. $|f(z_1)| > 1$
 $\exists z_2: |z_2 - z_0| < R_1/2$ т.е. $|f(z_2)| > 2$ и т.н.
 $\exists z_n: |z_n - z_0| < R_1/n$ т.е. $|f(z_n)| > n$ -- $z_n \rightarrow z_0$
 $|f(z_n)| \rightarrow +\infty$. $w \in \mathbb{C}$ - крайно число.

Изясняваме противното т.е. $\exists w_0 \in \mathbb{C}, \exists \varepsilon_0 > 0$
 $\exists R_1 > 1$ т.е. $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon_0, \forall z: 0 < |z - z_0| < R_1$



За тази функция
 $F(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}, 0 < |z - z_0| < R_1$

Тя е холоморфна в
 $0 < |z - z_0| < R_1$ и

$$|F(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$$

От $Th 1$ (Риман) $\Rightarrow z_0$ е особенна а. т. на F . Имаме че $f(z) = \frac{1}{F(z)} + w_0$, откъдето z_0 е или особенна а. т. на f или полюс на f ($F(z_0) = 0$) $\Rightarrow \frac{1}{f}$

$2 \rightarrow 3$ очевидно

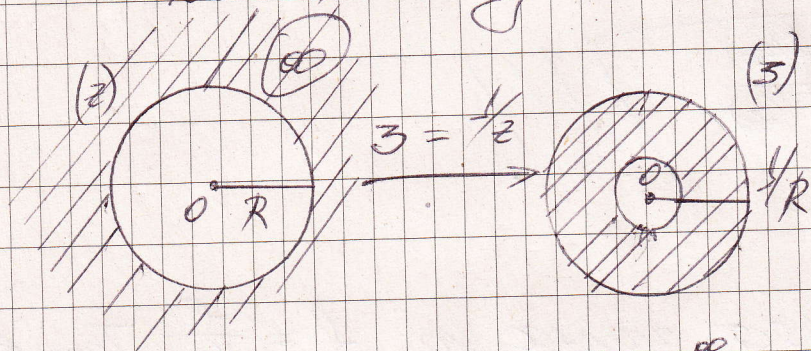
$3 \rightarrow 1$ Очевидно. Ако $\exists$ крива γ или I или $\mathbb{R}$

Тн (Пинар) Ако z_0 е съществена ос. т на f то във всяка околност на z_0 , f приема всяка стойност (комплексна, $\forall w \in \mathbb{C}$) с евентуално изключение на една

Пример: $e^{1/z}$, 0-свщ. ос. т, $e^{1/z} = c, c \neq 0$
Особеност $\in \infty$

Лемма ∞ е изолирана ос. т. на f , ако f е холоморфна в $|z| > R, R > 0$

Лемма ∞ е страничен полюс или свщ. ос. т на $f(z)$ ако 0 е съответно страничен полюс или свщ. ос. т на $g(z) = f(1/z)$



∞ - отстр, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^n$

∞ - полюс - $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^n + b_m z^m + \dots + b_1 z$,
 $b_m \neq 0, m \geq 1$

∞ - свщ. ос. т. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$
 $b_n \neq 0$ за безброй много n

Тн за резидуите
Нека $f(z)$ е холоморфна в $0 < |z - z_0| < R$ и
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ (Лоран), където
 $a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$
 $|z - z_0| = \rho < R$

Поф Резултат - $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|} f(z) dz$

Пресметате на $\text{Res}(f, z_0)$ е нормал

При z_0 - прост $\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = 0!$

1) z_0 - прост нула

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, (z - z_0) f(z) = a_{-1} + (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a_{-1}$$

2) $f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, φ, ψ са регулярни в z_0

$$\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \varphi'(z_0) \neq 0$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}$$

Искам да z_0 е прост нула на $f = \frac{\psi}{\varphi}$. Тогава

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z)}{\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}} =$$

$$\frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}$$