

КА Когхайсим

13.11.14

Интерпретация крива от комплексно-значна функция

Def Нека $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in C[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx$$

Def Нека $\gamma: z = \gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ е гладка крива
и $f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ е непрекъсната функция

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Ако γ е частично гладка, тогава $I_a = a_0 < \dots < a_n = b$
т.е. $\gamma|_{[a_n, a_{n+1}]}$ е гладка за $\forall n = 0, \dots, n-1$

Тогава $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{n-1} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \text{дължината}$$

Примери

① Нека $C = C(a, r)$. Да се пресметне

$$\int_C (z-a)^u dt, u \in \mathbb{Z}$$

$$C: z = a + i r e^{it}$$

Реш

По Def $\int_C (z-a)^u dz = \int_0^{2\pi} r^u e^{i u t} i r e^{it} dt =$

$$i r^{u+1} \int_0^{2\pi} e^{i(u+1)t} dt = \begin{cases} \text{при } u = -1 \Rightarrow i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \\ \text{при } u \neq -1 \Rightarrow \frac{i r^{u+1}}{u+1} [e^{i(u+1)t}]_0^{2\pi} = 0 \end{cases}$$

$$\int_{C(a)} (z-a)^u dz = \begin{cases} 2\pi i & u = -1 \\ 0 & u \neq -1, u \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

② Нема $\gamma: z = \gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$
 да се изчисли

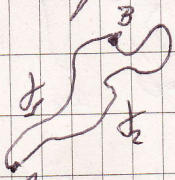
$$\int_{\gamma} z^u dz, \quad u \geq 0, u \in \mathbb{Z}$$

Реш

$$\int_{\gamma} z^u dz = \int_a^b [\gamma(t)]^u \gamma'(t) dt = \int_a^b [\gamma(t)]^u d\gamma(t) =$$

$$\frac{[\gamma(t)]^{u+1}}{u+1} \Big|_a^b = \frac{\gamma^{u+1}(b) - \gamma^{u+1}(a)}{u+1} = \frac{B^{u+1} - A^{u+1}}{u+1}$$

В частност ако γ е затворена т.е. $A=B$ то

$$\int_{\gamma} z^u dz = 0 \quad \text{т.е.} \quad \int_{\gamma_1} z^u = \int_{\gamma_2} z^u$$


Свойства на $\int f$

1) Ако $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ($\gamma_1^* = \gamma_2^*$) и $f: \gamma_1^* (\gamma_2^*) \rightarrow \mathbb{C}$ е непрекъсната функция, то $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

2) Лек с γ за свиване на променливите
 линейност $\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\gamma} f + \beta \int_{\gamma} g$

3) Адитивност Нема $\gamma_1: z = \gamma_1(t): [a, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ и $\gamma_2: z = \gamma_2(t): [b_1, b] \rightarrow \mathbb{C}$, като $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_1)$. Тогава $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ е крива
 $\int_{\gamma \cup \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$

По теор $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \int f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f$

4) $\int_{\gamma^-} f = - \int_{\gamma} f$

5) $\gamma: z = \gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ е непрекъсната
 $|\int_{\gamma} f(z) dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$

В частност ако $|f(z)| \leq M, z \in \gamma$ то $|dz|$
 $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq M l(\gamma), l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Примитивна Th на Лайбниц-Нютон

теор Нека $f: D \rightarrow \mathbb{C}, D$ -област е непрекъсната
 $f \rightarrow$ Следните твърдения са еквивалентни:

1) f има примитивна в D

2) $\int_{\gamma} f = 0$, $\forall$ затворена крива $\gamma \subset D$

3) $\int_{\gamma} f$ не зависи от кривата т.е. γ_1 и γ_2 са
 с общо начало и край ($\gamma_1, \gamma_2 \subset D$) то

$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

Следствие

Ако $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ е конформна в област D
 и $F'(z) = 0, z \in D$ то $F(z) \equiv \text{const}$ в D

Връзка между интеграл върху крива от
комплексно-значна функция и криволинейните
интеграл от $\mathbb{R}^2$ род

Нека $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ и $f: \gamma \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$
- комплексната функция

Тогава
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + i v) (dx + i dy) =$$
$$\int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy$$