

Цели ф-ии. Тн на Вайерштрас

Нека $f_n: M \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1,2,\dots$

Име позволим $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно сходящо в M , ако

- 1) $\exists \delta$, т.е. за $n > \delta$, $f_n(z) \neq 0$, $\forall z \in M$
 - 2) $\{f_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)\}$ е равномерно сходящо в M , като пратената n функция няма нули в M
- Възможност, ако $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ холоморфна в D и $n=1,2,\dots$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно сходящо в D комплексните единици в D , то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е холоморфна ф/и в D .

Критерий за равномерна сходимост на безкрайни произведения от функции

Нека $f_n: M \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1,2,\dots$, $f_n(z) \neq 0$, $\forall z \in M$, $n=1,2,\dots$.
 Това важи ако $\sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z)$ е равномерно сходящо в M и сумата е ограничена функция, то и $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно сходящо в M .
 Възможност, ако M е компакт и $\log f_n$ са непрекъснати ф/ии в M , то $\sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z)$ е ограничена функция.

Заб. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $S \subset D$ е множество, което няма точки на събиране в D . Съществуват ли холоморфни функции в D , които нули са точно точките на S .

2 частни случая

1) $S = \emptyset$

Всичко е същото ако $g(z)$ е цяла f/z то $f(z) = e^{g(z)}$ е цяла функция и $f(z) \neq 0$
Точно е и обратното. Ако $f(z)$ е цяла f/z $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, то $\exists$ цяла f/z $g(z)$ т.е. $f(z) = e^{g(z)}$

2) $S = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. $f(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$, т.е.

функцията $f(z)$ е решение. Обратно. Ако $f(z)$ е решение на задачата, то

$\frac{f(z)}{\prod_{k=1}^n (z - z_k)}$ е цяла f/z без нули в $\mathbb{C} \Rightarrow$

$\exists$ цяла f/z $g(z)$, т.е. $f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^n (z - z_k)$

Нека сега $S \subset \mathbb{C}$ е безкрайно множество

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

т.к. $S \cap \{ |z| \leq n \} = \{ \text{краен брой} \}$ то S е изброимо множество

Th1 (Вайтерштрас)

За всяка редица $\{z_n \in \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$, $\exists$ цяла f/z с нули точно тогава z_n , $n=1, 2, \dots$

Заб. Редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогава z_n може да фиксираме m -ици. Тогава $\exists n \geq m$, ибгето n е кратността на f в т. z_n

Ако коментар...!

$\prod_{n=1}^{\infty} (z - z_n)$ не ни върши работата, то е разходяща
 $\forall z \in \mathbb{C} (|z_n| \rightarrow \infty)$. Търсим $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 1$. Ако $z_n \neq 0$
 да разгледаме $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n})$. То вече не винаги е с.
 Например $z_n = n \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{n})$ е разходяща за $z = \pm 1$

Идеята на Вайерштрас

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n}) e^{P_n(z)}$, където $P_n(z)$ - полином
 ще конструираме полином P_n , т.е.

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n}) e^{P_n(z)}$ да е равномерно сходяща в/у
 компактно множество на $\mathbb{C} (z_n \neq 0)$

1) $z_n \neq 0, \forall n$. Остатъчно е да докажем равномерна
 сходимост в/у всеки кръг, $|z| \leq R$. Нема да
 т.е. $|z_n| \rightarrow \infty$ за $n \rightarrow \infty \Rightarrow (*)$

$$\left| \frac{z}{z_n} \right| \leq \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}, \forall |z| \leq R$$

$$\left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| \geq 1 - \left| \frac{z}{z_n} \right| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0, \forall |z| \leq R, n \rightarrow \infty$$

Предвид критерия за равномерна сходимост на
 безкрайния произведение от ф/ми, остатъчно е
 да докажем че $\sum_{n=1}^{\infty} (\log(1 - \frac{z}{z_n}) + P_n(z))$ е
 равномерно сходяща в $|z| \leq R$

За да развием $\log(1 - \frac{z}{z_n})$ в тейлоров ред около $z=0$

$$\log(1 - \frac{z}{z_n}) = -\frac{z}{z_n} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n}\right)^2 - \dots - \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_n}\right)^n - \dots$$

$$P_n(z) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_n}\right)^n$$

$$\left| \log(1 - \frac{z}{z_n}) + P_n(z) \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{n+1} - \dots \right| \leq \frac{1}{n+1} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{n+1} + \frac{1}{n+2} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{n+2} + \dots$$

$$= \left| \frac{z}{z_n} \right|^{u+1} \left(\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u+2} \left| \frac{z}{z_n} \right| + \dots \right) \stackrel{u \rightarrow \infty}{\leq} \frac{1}{2^{u+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2^{u+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^u} \quad \text{Оттук} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\log(1 - \frac{z}{z_n}) + P_n(z))$$

е равномерно сходяща в $|z| \leq R$. Т.к. $R > 0$ се произволно, то $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n}) e^{P_n(z)}$ е равномерно сходяща във компактните нормирани множества на $\mathbb{C}$ и дефинира цяла ф/я, при това с нули точно z_n

2) Ако редицата е $\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_m, z_1, z_2, \dots, z_n \neq 0$, то решението на задачата е ф/я

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n}) e^{P_n(z)}, \text{ където } P_n(z) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_n} \right)^n$$

Обратно. Т.к. по Вайерштрас. Ако $f(z)$ е цяла ф/я с нули $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $|z_n| \rightarrow \infty$, то съществува

$$g(z), \text{ т.е. } f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n}) e^{P_n(z)}, \quad P_n(z) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_n} \right)^n$$

Един случай в който $\deg P_n(z) = S$, т.к.

Тл 3 Нека $f(z)$ е цяла ф/я с нули $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \neq 0$

$$\text{и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{S+1}} < \infty. \text{ Тогава } f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n}) e^{P_S(z)}$$

$$P_S(z) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{S} \left(\frac{z}{z_n} \right)^S$$