КА Хаджийски 11.11.14

Деф Всяко решение на $y \neq 0$, $tg\,w = z$, $z \in \mathbb{C}$ се нарича $\operatorname{arctg} z$

$$tg\,w = z \Leftrightarrow \frac{\sin w}{\cos w} = z \Leftrightarrow \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = z \Leftrightarrow$$

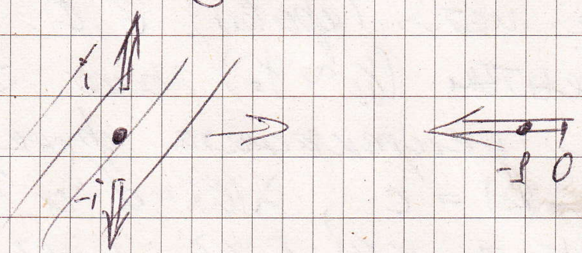
$$\frac{e^{i2w} - 1}{i(e^{i2w} + 1)} = z \Leftrightarrow e^{i2w}(1 - iz) = 1 + iz \overset{z \neq \pm i}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{i2w} = \frac{1+iz}{1-iz},\ z \neq \pm i \Rightarrow i2w = \log \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$w = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$$

Област в която може да се отдели еднозначен клон на $\operatorname{arctg} z$

$$\zeta = \frac{1+iz}{1-iz}$$



при $\zeta = -1 \Rightarrow z = \infty$

$$(1 - iz)\zeta = 1 + iz \Rightarrow z = \frac{1-\zeta}{-i(\zeta+1)},\ z(0) = -\frac{1}{i},\ z(\infty) = \frac{1}{i} = -i$$

$$\mathbb{C} / [i, i\infty) \cup (-i\infty, -i]$$

Развитие на $\operatorname{arctg}_0 z$ в степенен ред около $z = 0$

Лема

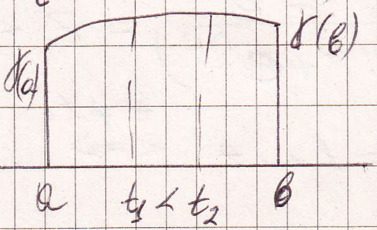
$\operatorname{arctg}_0 z$ е холоморфна функция в $\mathbb{C}/[i, i\infty) \cup (-i\infty, -i]$ и $(\operatorname{arctg}_0 z)' = \frac{1}{1+z^2}$

Линеен интеграл от функция на комплексна променлива (интеграл в/у крива)

Деф Път (крива) в $\mathbb{C}$ се нарича $\forall$ непрекъснато изобр.

$$\gamma : z = \gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$$

$\gamma^* = \{z : z = \gamma(t),\ t \in [a,b]\}$ носител на γ, $\gamma \neq \gamma^*$



Пр $\gamma_1 : z = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_2 : z = e^{-it},\ t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_1 \neq \gamma_2,\ \gamma_1^* = \gamma_2^*$

$\gamma(a)$ - начало на γ, $\gamma(b)$ - край на γ

Ако $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ $(t_1 t_2 \neq a\, b)$ - γ се нарича Жорданова (проста) крива, $\gamma^- = \gamma(b + a - t),\ t \in [a,b]$

Деф (Еквивалентни пътища (криви))

Нека $\gamma_1 : z = \gamma_1(t),\ t \in [a,b]$, $\gamma_2 : z = \gamma_2(\tau),\ \tau \in [c,d]$ са два пътя (криви) в $\mathbb{C}$. Казваме че γ_1 и γ_2 са еквивалентни ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) ако $\exists$ ~~[illegible]~~ монотонно растяща непрекъсната функция $\tau = \lambda(t) : [a,b] \to [c,d]$ т.ч. $\lambda(a) = c$, $\lambda(b) = d$ и $\gamma_1(t) = \gamma_2(\lambda(t)),\ t \in [a,b]$

Деф $\gamma : z = \gamma(t) : [a,b] \to [c,d]$ е гладка ако $\exists\ \gamma'(t)$ непрекъсната и $\gamma'(t) \neq 0,\ \forall t \in [a,b]$, γ - частично гладка, ако $\exists\ a = a_0 < a_1 \ldots < a_n = b$ т.ч.

$\gamma|_{[a_k, a_{k+1}]}\ k = 1 \ldots n-1$ е гладка крива

Деф $\gamma_1\ \gamma_2$ гладки пътища (криви)

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ ако $\exists\ \tau = \lambda(t)$ - непрекъснато диференцируема, $\lambda'(t) > 0$, $\gamma_2(\lambda(t)) = \gamma_1(t),\ t \in [a,b]$