КА Ходжийски 3.12.14

Деф. Ред на Лоран

(1) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$

Th. Областта на сходимост на (1) е множеството
$D = \{z : |z-z_0| < R, \ |z-z_0| > r\}$, където

$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Док. От ф/лата на Коши-Адамар $\Rightarrow$

в степенен ред $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)$ е сходящ за $|z-z_0| < R$, а степенния ред

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} = f_2$

Ако $r \geq R$, то $D = \emptyset$
Ако $r < R$, то $D = \{0 \leq r < |z-z_0| < R \leq +\infty\}$
В този случай f_1 е холоморфна в $|z-z_0| < R$, f_2 е холоморфна в $|z-z_0| > r$ и $f = f_1 + f_2$ е холоморфна в D

Th 2. (Лоран)
Ако $f(z)$ е холоморфна във венеца $V: V(z_0, r, R) = \{z : 0 \leq r < |z-z_0| < R \leq +\infty\}$, то

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$, $z \in V$

където коефициентите a_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ са еднозначно определени от формулата

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

$\gamma_\rho = \{ |z - z_0| = \rho, \ r < \rho < R \}$, където редът е равномерно сходящ върху компактните подмн-ва на V

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ - холоморфна в } |z - z_0| < R$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \text{ - холоморфна в } |z - z_0| > r$$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad z \in V$$

Неравенства на Коши

Ако $f(z)$ е холоморфна във венеца $V = \{ 0 \le r < |z - z_0| < R \le +\infty \}$ и

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ z \in V$, то $|a_n| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n}$ за $n = 0, \pm 1, \dots; \ r < \rho < R$

$$M(\rho) = \max_{\gamma_\rho} |f(\zeta)|$$

Изолирани особени точки.

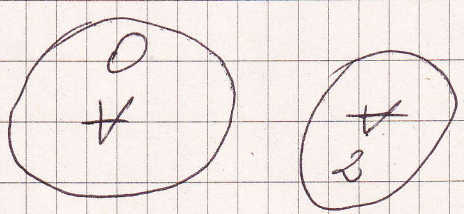
Th на Риман и на Сохоцки-Казорати-Вайерщрас

Деф Точката $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича изолирана особена точка на f, ако f е холоморфна в пробитена околност

$$K'(z_0, R) = \{ 0 < |z - z_0| < R \} \text{ на } z_0$$

Примери

① $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$



0, 2 са изолирани особени точки на f

② $f(z)=\log z$

0 е не изолирана особеност на f

Класификация на изолираните особени точки

Нека f е холоморфна в $K'(z_0,R)=$
$=\{0<|z-z_0|<R\}$ и $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,\ z\in K'(z_0,R)$

1) z_0 – отстранима особена точка, ако
$a_{-n}=0,\ \forall n=1,2\dots$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

2) z_0 – m-кратен полюс, ако $a_{-m}\neq 0$ и
$a_{-n}=0$ за $\forall n>m$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n+\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

3) z_0 – съществено особена точка, ако $a_{-n}\neq 0$
за безкрайно много n

Пример

$f_1(z)=\frac{\sin z}{z}$ – холоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

0 - изолирана особена точка

$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$

$f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{3!}\dots$

0 отстранима особена точка и $\lim_{z\to 0} f(z)=1$

③