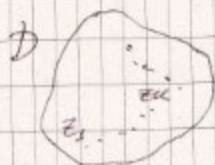


УА Хаджиоанис 08.01.15

Безкрайно произведение от комплексни числа
и от функции

Def $\{z_n \in \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ наричаме
безкрайно произведение на комплексни числа
а $P_n = \prod_{k=1}^n z_k$ - частично произведение



? $\exists$ конформна в D , т.е.
 $f(z_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

При $D = \mathbb{C}$

„Def“ $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящо, ако $P_n \rightarrow P$
0.1.2.3... $n \rightarrow \infty \Rightarrow 0$
1.2.3... $\rightarrow \infty$ разх!
при $z_n = q^n$, $|q| < 1 \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} z_n \rightarrow 0$

Def 1) Нека $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$

Назваме $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ безкрайното произведение е сходящо, ако е сходящо редицата от частични произведения и $P_n \rightarrow P \neq 0$

2) В общият случай, назоваме $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящо, ако $\exists N \geq 1$, т.е. $z_n \neq 0$, за $n > N$ и $\prod_{n=N+1}^{\infty} z_n$ е сходящо. Ако $N = \prod_{k=N+1}^{\infty} z_k$, то
 $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_N \cdot q$, $q \neq 0$

Примери

1) $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})$ - разходящо
 $P_n = \prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k}) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

2) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})$ - разходящо
 $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = n+1 \rightarrow \infty$

3) $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$ - сходящо

$$P_n = \prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)(n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots}$$

$$= \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Нека $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящо ($z_n \neq 0$). Тогава

$z_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1$, т.е. необходимо условие
 едно безкрайно произведение да е сходящо
 е общият му член да клони към 1, но то
 не е достатъчно (пр (1) и пр (2))

Тогава можем $z_n = 1 + u_n$, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$

Необходимо условие за сходимост е $u_n \rightarrow 0$

Тв 1 Безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$, $u_n \neq -1$
 u_n е сходящо, тогава и само тогава, когато
 е сходящо редът $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + u_n)$

Доказ

Нека $S_n = \sum_{k=1}^n \log(1 + u_k)$, $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k)$

← Нека е сходящ редът S_n , т.е. $S_n \rightarrow S$.

Тогава $P_n = (1+u_1) \cdot (1+u_2) \cdot \dots \cdot (1+u_n) =$
 $= e^{\log(1+u_1)} \cdot e^{\log(1+u_2)} \cdot \dots \cdot e^{\log(1+u_n)} = e^{S_n} \rightarrow e^S \neq 0$. Следователно

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ е сходящо.

Заб. В тази теорема твърдението остава в
 сила, ако е сходящ ред $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + u_n)$,

където $\arg(1+u_n)$ е един едновременно начин на $\arg(1+u_n)$ (т.е. той зависи от n)

→ Нека $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ е сходящо, т.е. $P_n \rightarrow P$, $P \neq 0$. За да докажем че е сходящо редица $\sum_{n=1}^{\infty} \arg_0(1+u_n)$ е достатъчно да покажем, че са сходящи редиците $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \arg(1+u_n)$. Имаме че

$$\textcircled{a} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n |1+u_k| = |P| \rightarrow |P|, P \neq 0$$

т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ е сходящо

$$\textcircled{b} \sum_{n=1}^{\infty} \arg_0(1+u_n)$$

$\arg_0(1+u_1) + \dots + \arg_0(1+u_n) = \arg P_n$, където $\arg P_n$ е някакъв аргумент на P_n , $\arg_0 P_n$

Понеже $P_n \rightarrow P \neq 0$, то ако фиксираме един аргумент ℓ на P , можем да намерим редица $\{\arg^* P_n\}$ т.е. $\arg^* P_n \rightarrow \ell (= \arg P)$. Имаме че $\arg^* P_n = \arg P_n + 2k_n\pi$, $n=1, 2, \dots$, т.е.

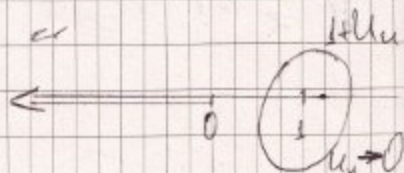
$$(*) \arg^* P_n = \sum_{k=1}^n \arg_0(1+u_k) + 2k_n\pi. \text{ Ще докажем че } k_n \equiv k, n \geq 1$$

Най-лесно: $\arg^* P_n - \arg^* P_{n-1} = \arg_0(1+u_n) + 2\pi(k_n - k_{n-1})$. Не

$$\arg^* P_n - \arg^* P_{n-1} \rightarrow \ell - \ell = 0$$

$$2\pi(k_n - k_{n-1}) \rightarrow \arg_0 1 = 0$$

$$\Rightarrow k_n - k_{n-1} \rightarrow 0$$



②

$\Rightarrow k_n \equiv k_{n+1}$ за $n \geq 2$

След от (*) $\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n \arg(1+u_k)$ е сходяща
т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} \arg(1+u_k)$ е сходяща

Лемма $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k)$ е абсолютно сходяща, ако е
сходяща $\sum_{k=1}^{\infty} (1+|u_k|)$

16

Нека $u_n \in \mathbb{C}$, $u_n \neq -1$, $u_n = 1, 2, \dots$

Следните твърдения са еквивалентни

- 1) $\prod_{k=1}^{\infty} (1+|u_k|)$ е абсолютно сходяща
- 2) $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ е абсолютно сходяща
- 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+|u_k|)$ е абсолютно сходяща

Дока

$$(1) \Leftrightarrow (2) \quad P_n = \prod_{k=1}^n (1+|u_k|), \quad S_n = \sum_{k=1}^n |u_k|$$

$$S_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \leq (1+|u_1|)(1+|u_2|) \dots (1+|u_n|) \\ = P_n. \text{ Следва така } e^x \geq 1+x, \quad \forall x \geq 1$$

$$\text{Тогава } P_n = (1+|u_1|) \dots (1+|u_n|) \leq e^{|u_1|} \dots e^{|u_n|} = e^{S_n}$$

т.е. (#) $S_n \leq P_n \leq e^{S_n}$. Тък. $\{S_n\}_n$ и $\{P_n\}_n$ са
монотонно разходящи редици, то от (#) $\Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2)$

Лема

$$\frac{1}{2} |z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2} |z|, \quad \forall z: |z| \leq \frac{1}{2}$$

Тейлоровото развитие $\log_0(1+z)$ около $z=0$ е:

$$\log_0(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots = z \left(1 - \frac{z}{2} + \dots\right)$$

$$\text{Тогава } |\log_0(1+z)| \leq |z| \left(1 + \frac{|z|}{2} + \frac{|z|^2}{3} + \dots\right) \leq |z| \left(1 + \frac{1}{2}\right) = |z| \frac{3}{2}$$

$$|\log_0(1+z)| \geq |z| \left(1 - \frac{|z|}{2} - \frac{|z|^2}{3} - \dots\right) \leq |z| \left(1 - \frac{1}{2}\right) = |z| \frac{1}{2}$$

Ако някое от условията за абсолютна сходимост (1) или (2) са изпълнени, то $|u_n| \rightarrow 0 \Rightarrow |u_n| < 1/2$, $n > N$ - т.е.

$$\frac{1}{2} |u_n| \leq |\log_0(1+u_n)| \leq \frac{3}{2} |u_n|. \text{ Оттук } \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$$

Безкрайни произведения от функции
вер.

Нека $f_n(z): M \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1,2,\dots$. Ще казваме че $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно сходящо в M , ако $\exists \eta$, т.е. $f_n(z)$ е разликност 0 за $|f_n| > \eta$, $\forall z \in M$ и $P_n = \prod_{k=1}^n f_k(z)$ е равномерно сходящо в M , като границата ѝ $f(z)$ няма нули в M .

Тв. (Критерии за равномерна сходимост)

Нека $f_n(z): M \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(z) \neq 0$, $\forall n=1,2,\dots$

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z)$ е равномерно сходящо в M

и сумата му е ограничена функция, то

$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно сходящо в M

($\log f_n$ е еднозначен клон на $\log f_n$)

⑤

Тогда $P_n(z) = \prod_{k=1}^n f_k(z)$, $S_n(z) = \sum_{k=1}^n \log f_k(z)$
 $S_n(z) \Rightarrow S(z)$, $|S(z)| \leq A$, $z \in M$.

Тогда $P_n(z) = e^{S_n(z)}$. Use показатель $e^{S_n(z)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{S(z)}$

Тогда $|e^{S_n(z)} - e^{S(z)}| = |e^{S(z)}| |e^{S_n(z) - S(z)} - 1|$. Т.к.

$$|e^w| = \left| 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \dots \right| \leq 1 + \frac{|w|}{1!} + \frac{|w|^2}{2!} + \dots = e^{|w|}$$

$$|e^w - 1| \leq \frac{|w|}{1!} + \frac{|w|^2}{2!} + \dots = e^{|w|} - 1, \quad \forall w \in \mathbb{C}, \text{ то}$$

$$|e^{S_n(z)} - e^{S(z)}| \leq e^{|S(z)|} (e^{|S_n(z) - S(z)|} - 1)$$

$$|S(z)| \leq A \Rightarrow e^{|S(z)|} \leq e^A$$

$$S_n(z) \Rightarrow S(z) \Rightarrow \forall \delta > 0, \exists N \text{ т.ч. } \forall n > N \text{ и } \forall z \in M, |S_n(z) - S(z)| < \delta$$

$$|e^{S_n(z)} - e^{S(z)}| \leq e^A (e^\delta - 1) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon, \forall n > N, \forall z \in M$$