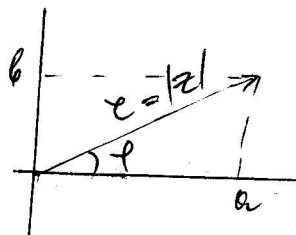


КА

Хархитиши

07.10.14



$$z = a + ib \equiv M(a, b) \equiv \overrightarrow{OM}$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z e^{i\varphi}$$

$$\arg zw = \arg z + \arg w$$

свойствие на множества

$$\arg_0 zw \neq \arg_0 z + \arg_0 w$$

$$\text{Нека } z = w = -1, \quad 0 = \arg_0 1 = \arg_0 (-1)(-1)$$

$$\arg_0 (-1) + \arg_0 (-1) = 2\pi \neq 0$$

Ф-на на Мавер

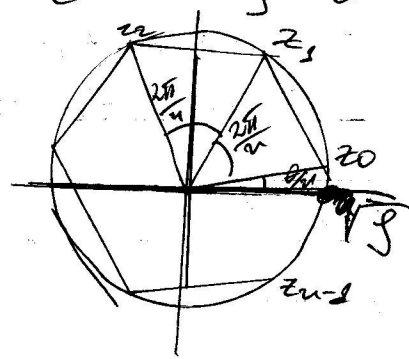
$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}; \quad (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

$$\text{У-то } z^n = c, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\text{Нека } z = r e^{i\varphi}, \quad c = \rho e^{i\theta}. \quad \text{Товава } z^n = c \Leftrightarrow$$

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$



$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ са върхове на
супервирен n -ъгълник вървят
в окръжност с ц. O и $R = \sqrt[n]{\rho}$

Резици и редове от комплексни числа

Деф 1 Околност на т. $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича всеки
кръг $K(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$

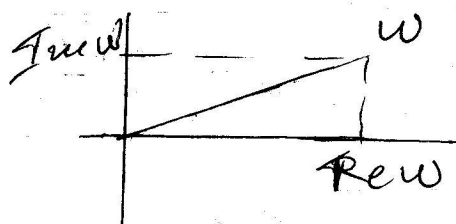
Def 2 $\{z_n \in \mathbb{C}\}, z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z_0$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$)

ако за всяко $\varepsilon > 0$, $\exists \nu = \nu(\varepsilon)$, т.е. $z_n \in K(z_n, \varepsilon)$ за всяко $n > \nu$ (т.е. $|z_n - z_0| < \varepsilon, \forall n > \nu$)

Def 3 $\{z_n \in \mathbb{C}\}$ е резуланта на Коши
ако за $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon)$ т.е. $|z_m - z_n| < \varepsilon$ за $\forall m, n > \nu$

Th $\{z_n\}$ е сходяща $\Leftrightarrow \{z_n\}$ е резуланта на Коши

Th 1 Резултата $\{z_n\}$ е сходяща $\Leftrightarrow$ са сходящи и резуланти $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и $\{\operatorname{Im} z_n\}$. При това $z_n \rightarrow z_0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z_0$ и $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z_0$



$$\max\{|\operatorname{Re} w|, |\operatorname{Im} w|\} \leq |w| \leq |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w|$$

Th 2 Ако $\{z_n \in \mathbb{C}\}_1^\infty$ е резуланта от комплексни - числа и $|z_n| \rightarrow |z_0|$, ако $\arg z_n \rightarrow \arg z_0$ то $z_n \rightarrow z_0$

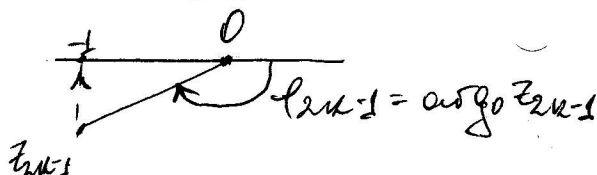
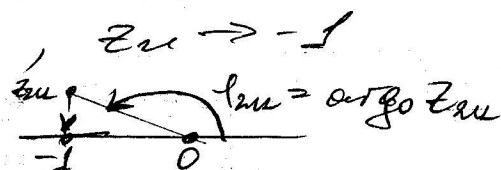
Th 3 Ако $z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow |z_n| \rightarrow |z_0|$

Примери

① $z_n = -1 + i \frac{(-1)^n}{n}, n=1, \dots$

Нека n - четно, $\arg z_n \rightarrow \pi$

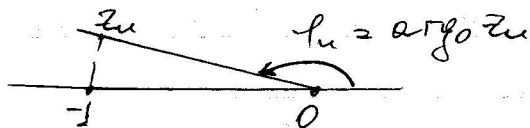
Нека $n = 2k-1$, $\arg z_{2k-1} \rightarrow -\pi$



сн $\varphi_n = \arg z_n$ е скорост

② $z_n = -1 + \frac{i}{n}$, $z_n \rightarrow -1$

$\varphi_n \rightarrow \pi \neq -\pi = \arg(-1)$



Зад Нека $z_n \rightarrow z_0 \neq 0$ и φ е фиксиран аргумент на z_0 . ДСН се ако изберем $\arg z_n \in [\varphi - \delta, \varphi + \delta)$ то $\arg z_n \rightarrow \varphi$

Деф т. z_0 е точка на събстване на $\{z_n \in \mathbb{C}\}_1^\infty$ ако $\exists \varepsilon > 0$ в $\mathcal{R}(z_0, \varepsilon)$ има безкрайно много членове на $\{z_n\}$

Тб т. z_0 е точка на събстване на $\{z_n \in \mathbb{C}\}_1^\infty$ $\Leftrightarrow \exists$ поредица $\{z_{n_k}\}$, $z_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_0$

Деф $\{z_n\}_1^\infty$ е ограничена, ако $\exists R > 0$, т.е. $z_n \in \mathcal{K}(0, R)$, $\forall n$, т.е. $|z_n| < R$

Тл на Вайерштрассе

Всяка ограничена редица има поне една точка на събстване ($\Leftrightarrow$ има скоростна ПР)

Редове от комплексни числа

Деф Редът $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ е скоростен ако е скоростен

редицата $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$, $n = 1, 2, \dots$

Критерии на Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon)$ т.е. за $\forall n > m > \nu$ $|z_m + z_{m+1} + \dots + z_n| < \varepsilon$

(Ако $\sum z_n$ е сходящ $\Rightarrow z_n \rightarrow 0$)

Деф $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е абс. сх ако $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$

Тб1 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е абс. сх то $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е сх

Тб2 Ако $a_n \geq 0, |z_n| \leq a_n$ за $\forall n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ то $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е абс. сх

Деф $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} d_n (= \lim_{n \rightarrow \infty} d_n)$ ($d_n \in \mathbb{R}$)
- най-голяма т. на събстване

1) α е т. на събстване на $\{d_n\}$ т.е. $\exists$ подпослед. $d_{n_k} \rightarrow \alpha$

2) За $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon)$ т.е. $d_n < \alpha + \varepsilon$ за $\forall n > \nu$

Критерии на Коши

Нека $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \rho$. Тогава ако

$\rho < 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е абс. сх, а ако

$\rho > 1$ то редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е разходящ

Топологии в $\mathbb{C}$ - отворени, затворени, компактни, свързани мн-ва в $\mathbb{C}$

Нека $M \subseteq \mathbb{C}$

Деф 1. Точката z_0 се нарича вътрешна (външна) за M , ако $\exists \kappa(z_0, \varepsilon) \subset M$ (соответно $\kappa(z_0, \varepsilon) \subset \mathbb{C} \setminus M$)

Ако $z_0 \in \mathbb{C}$ е околност на z_0 има точки, както от самото M , така и от $\mathbb{C}/M - z_0$ се нарича гранична точка на M

$\text{Int } M = \{\text{вътрешни точки на } M\}$

$\text{Ext } M = \{\text{външни точки на } M\}$

$\partial M = \{\text{гранични точки на } M\}$

$$\mathbb{C} = \text{Int } M \cup \text{Ext } M \cup \partial M$$

Деф 2 Пробола околност на $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$U'(z_0, \varepsilon) = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Деф 3 т. z_0 е т. на събстване на M - то M ако $\forall \varepsilon > 0$ в $U'(z_0, \varepsilon)$ има поне една т. на M

Тв 1 т. z_0 е т. на събстване на $M \Leftrightarrow \exists \{z_n \in M\}_1^\infty, z_n \rightarrow z_0$

$$\bar{M} = M \cup \{\text{т. на събстване на } M\}$$

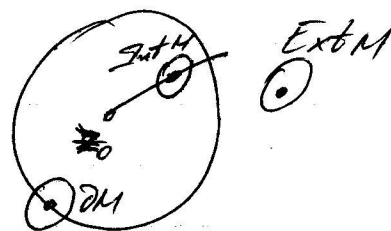
① $M = U(z_0, \varepsilon) = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$

$\text{Int } M = \text{---} M$

$\text{Ext } M = \{|z - z_0| > \varepsilon\}$

$\partial M = \{|z - z_0| = \varepsilon\}$

$\bar{M} = \{|z - z_0| \leq \varepsilon\}$



② $M = U'(z_0, \varepsilon)$

$\text{Int } M = M$

$\text{Ext } M = \{|z - z_0| > \varepsilon\}$

$\partial M = \{|z - z_0| = \varepsilon\} \cup \{z_0\}$

$\bar{M} = \{|z - z_0| \leq \varepsilon\}$

