КА Хаджийски 07.01.15

Принцип на максимума на модула

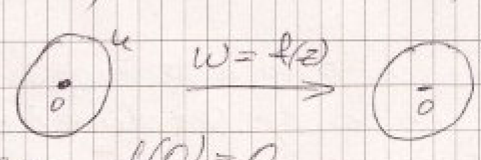
Th1 Ако f е холоморфна и $\neq const$ в обл $D \subset \mathbb{C}$ то $|f(z)|$ не приема най-голяма стойност в D.

Th2 Нека D е ограничена обл в $\mathbb{C}$ и f е холом в D и непрекъсната в $\overline{D}$. Тогава $\max\limits_{\overline{D}} |f(z)| = \max\limits_{\partial D} |f(\zeta)|$
$\left(|f(z)| < \max\limits_{\partial D} |f(\zeta)| \text{ за } \forall z \in D,\ f \neq const\right)$

Лема (Шварц)
Нека f е холом в $U = \{|z| < 1\}$, $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ $z \in U$. Тогава
1) $|f(z)| \leq |z|$, $z \in U$
2) $|f'(0)| \leq 1$

Като само в (1) (за някое z) или в (2) имаме равенство, то $f(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$

Док



По усл $f(0) = 0$
Ред на Тейлър: $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$
$$f(z) = z(a_1 + a_2 z + \ldots) = z.g(z)$$
Функцията $g(z)$ е сума на степенен ред, чийто радиус на сходимост е равен на радиуса на сходимост на тейлъровия ред на f. Поради това $g(z)$ е холоморфна в U. Нека $z \in U$ и $r > 0$ е т.ч. $|z| < r$ от Пmax (принципа на максимума) имаме че $|g(z)| \leq \max\limits_{|\zeta| = r} |g(\zeta)|$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \max_{|\zeta| = r} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| \leq \frac{1}{r} \to 1 \to |f(z)| \leq |z| \text{ за } \forall z \in U \text{ б(1)}$$

$f'(0) = a_1 = g(0)$

От Принципа за максимума $\Rightarrow |g(0)| \le \max\limits_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| \le$

$\le \frac{1}{r} \xrightarrow[r \to 1]{} 1 \Rightarrow |g(0)| \le 1$ т.е. (2) $\square$

Ако в (1) или (2) имаме равенство от ПМАХ $\Leftrightarrow g(z) = const$, $|g(z)| = 1$, $z \in U \Leftrightarrow g(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow$
$f(z) = e^{i\theta} z$

Конформните автоморфизми на единичния кръг U

Деф Конформен автоморфизъм на $D \subseteq \mathbb{C}$ се нарича всяко взаимно еднозначно конформно изображение в себе си

Тв. Всички дробно-линейни автоморфизми на единичния кръг U са дробно-линейни автоморфизми от вида

$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $z_0 \in U$

ТМ $Aut(U) = \{ z \to e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \theta \in \mathbb{R}, z_0 \in U \}$

Док Нека $f \in Aut(U)$ и $f(0) = \alpha$ ($|f(z)| \le 1$, f е холоморфна в U)

Нека $\lambda(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$ и $\varphi(z) = \lambda \circ f(z)$. Тогава φ е холоморфна в U. $|\varphi(z)| \le 1$ и $\varphi(0) = \lambda \circ f(0) = \lambda(\alpha) = 0$. От лемата на Шварц $\Rightarrow$

(1) $|\varphi(z)| \leq |z|$, $z \in U$. Функцията $z = \varphi^{-1}(\omega)$ $(\omega = \varphi(z))$ също е холоморфна в U $|\varphi^{-1}(\omega)| \leq 1$, $\varphi^{-1}(0) = 0$. Пак от лемата на Шварц $\Rightarrow$ $|z| = |\varphi^{-1}(\omega)| \leq |\omega| = |\varphi(z)|$ (2)

от (1) и (2) $\Rightarrow$ $|\varphi(z)| = |z|$, $\forall z \in U$ $\Rightarrow$ $\varphi(z) = e^{i\theta} z \Rightarrow \lambda_0 f(z) = e^{i\theta} z$ $\Rightarrow$ $f(z) = \lambda^{-1}(e^{i\theta} z)$ т.е. f е дробно-линейна трансформация и от твърдението $\Rightarrow$

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} , \theta \in \mathbb{R} , z_0 \in U$$

3