КА Хаджийски 06.10.14

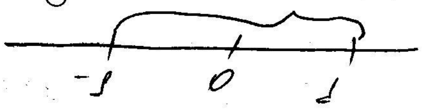
Защо е необходимо въвеждането на комплексна променлива?

Примери

1. $f_1(x) = \frac{1}{1+x} \in C^\infty(\mathbb{R}/\{-1\})$

Ред на Тейлър $f_1(x) = 1 - x + x^2 - \dots$, $\overset{сх}{-1<x<1}$ $(|x|<1)$

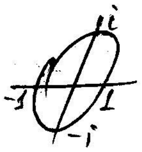
$R_{сх}$ - радиус на сходимост $= dist(0,-1) = 1$



$f_2(x) = \frac{1}{1+x^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Ред на Тейлър $f_2(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots$, сх $-1<x<1$

Нека $x \to z = x+iy$, $f_2(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots$, $|z|<1$,



$R_{сх} = dist(0, \pm i) = 1$

2. Може ли мн-вото на естествените числа да се разделим на краен брой непресичащи се аритметични прогресии с различни разлики

? $\exists S_k = \{a_k, a_k+d_k, \dots\}$, $k = 1, 2 \dots m$, $d_k \neq d_j, j \neq k$

т.е. $\mathbb{N} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \dots \cup S_m$? (Отг. Не)

Допускаме че $\exists \{S_k\}_1^m$

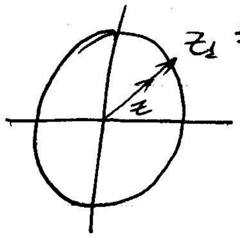
Разгл. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} = \sum_{k\in S_1} z^k + \sum_{k\in S_2} z^k + \sum_{k\in S_3} z^k$

$\sum_{k\in S_1} z^k = z^{a_1} + z^{a_1+d_1} + z^{a_1+2d_1} \dots = z^{a_1} + z^{a_1} z^{d_1} + z^{a_1}(z^{d_1})^2 + \dots$

Получаваме геометрична прогресия

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \dots + \frac{z^{a_m}}{1-z^{d_m}} = \frac{1}{1-z}$$

Нека $d_1 > (d_2 \dots d_m)$



$z_1 = \cos\frac{2\pi}{d_1} + i\sin\frac{2\pi}{d_1} \neq 1$, z клони към 1

Тогава

$$\underset{\frac{1}{1-z_1}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{1-z}}} = \underset{\infty}{\underset{\downarrow}{\frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}}}} + \underset{\text{крайно число}}{\underset{\downarrow}{\frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}}}} \underset{\text{крайни числа}}{\underset{\downarrow}{\dots}}$$

$\Rightarrow$ противоречие

Комплексни числа

$x^3 = 15x + 4$ — 3 реш

по Кардано $\Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

Деф $\mathbb{C} = \{z : z = (a,b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$

1. $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ и $b = d$
2. $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
3. $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

Алгебрична структура

Тв. $\mathbb{C}, +, \cdot$ е поле с нула $(0,0)$, единица $(1,0)$

обратен елемент на (a,b) относно събиране $(-a,-b)$

и умножение: $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

$\mathbb{C}_R = \{(a,0), a\in\mathbb{R}\} \leftrightarrow \mathbb{R}$, $(a,0)\leftrightarrow a$

отук нататък $\underline{(a,0)=a}$

$\mathbb{C}$ не наследява наредбата на $\mathbb{R}$

Действително ако

1) $i>0 \Rightarrow i.i > i.0 \Rightarrow -1>0$! противоречие

2) $i<0 \Rightarrow i.i > i.0 \Rightarrow -1>0$! противоречие

Алгебричен вид на комплексните числа

Деф

$$i := (0,1), \quad i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)(b,0) \text{ т.е.}$$

$$z = a+ib$$

Означения

$$Re\, z = a, \quad Im\, z = b$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \bar z = a - ib$$

$$z+\bar z = 2Re\, z, \quad z-\bar z = 2i\, Im\, z$$

$$z\bar z = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$$

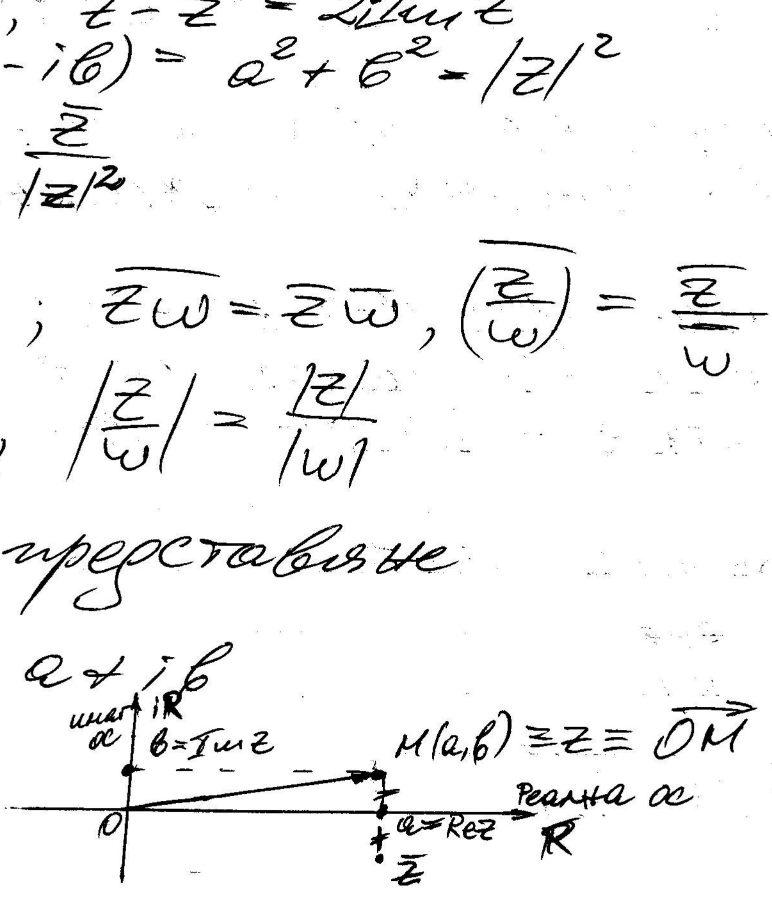
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar z}{z\bar z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$$

$$\overline{z\pm w} = \bar z \pm \bar w; \quad \overline{zw}=\bar z\,\bar w, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar z}{\bar w}$$

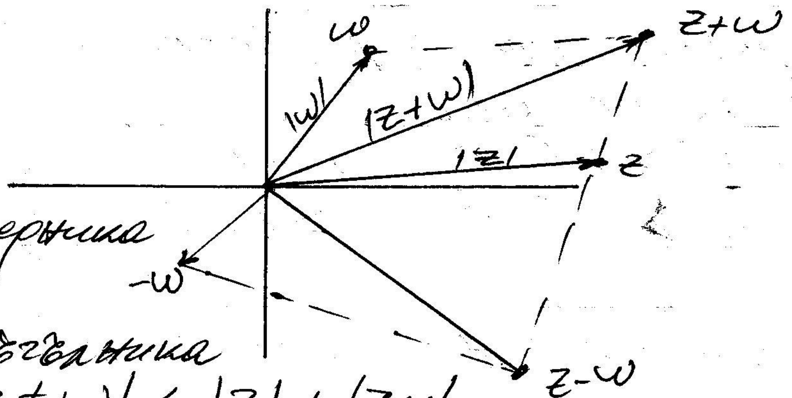
$$|zw|=|z||w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Геометрично представяне

$$z=(a,b)=a+ib$$



$|z| = dist(0,z)$, $|zw| = dist(z,w)$



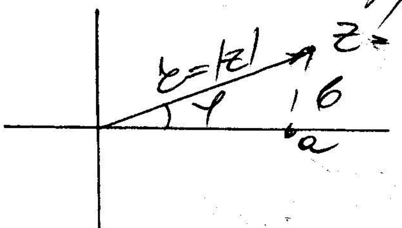
Правилото на успоредника

Неравенството на триъгълника

$$||z|-|w|| \le |z \pm w| \le |z| + |w|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Тригонометричен запис



$a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

$r = |z|$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Деф. $\arg z$ = ъгъла който вектора z сключва с Ox^+

$\arg z$ не е еднозначно определен

Ако φ е един аргумент на z то $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ също са аргументи на z

Деф $\arg_0 z \in [-\pi, \pi)$ – главен аргумент

Определяне на $\arg z$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{Re\, z}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{Im\, z}{|z|} \end{cases}$$

Примери

$\arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $\arg_0 i = \frac{\pi}{2}$

$\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $\arg_0(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\arg_0(1+i) = \frac{\pi}{4}$

Деф $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$

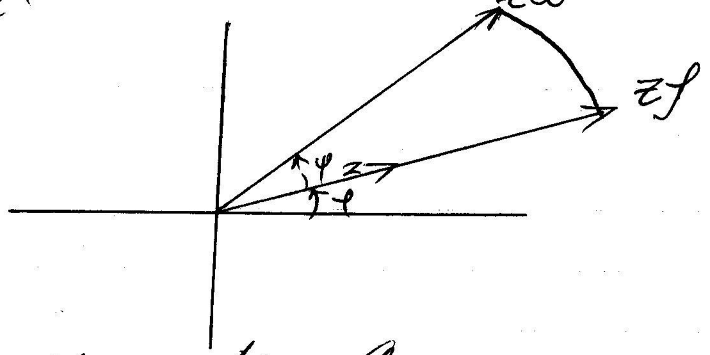
$|e^{i\varphi}| = 1$, $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$

$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$, $\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi-\psi)}$, $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$

Нека $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$

① $z = w \Leftrightarrow r = \rho$ и $\varphi - \psi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

② $zw = r\rho\, e^{i(\varphi+\psi)}$



Формула на Моавър

$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$