КА Хаджийски 05.01.15

Th на Руше

Нека γ е затворена жорданова крива. Функциите f, g са холоморфни в ок. $\gamma \cup \operatorname{Int}\gamma$ и $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in \gamma$. Тогава $f(z)+g(z)$ има толкова нули в $\operatorname{Int}\gamma$, колкото има $f(z)$

Принцип на запазване на областите

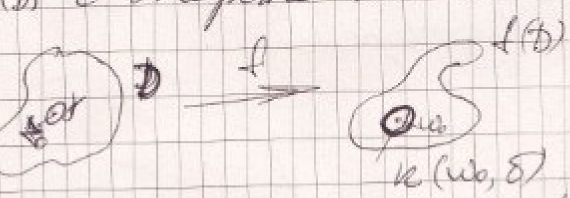
Th Ако $D \subset \mathbb{C}$ е област и $f: D \to \mathbb{C}$ е холоморфна и $\neq const$ в D, то $f(D)$ е област

Доказ.

1) $f(D)$ е линейно свързано мн-во

Нека $w_1, w_2 \in f(D)$ и $z_1, z_2 \in D$ са т.ч. $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$. Тъй като D е свързано мн-во, то $\exists \underset{крива}{\gamma \subset D}$, която свързва z_1 и z_2. Тогава $f(\gamma)$ (понеже е непрекъсната в D) е крива в $f(D)$, която свързва w_1 и w_2 т.е. $f(D)$ е линейно свързана

2) $f(D)$ е отворено мн-во

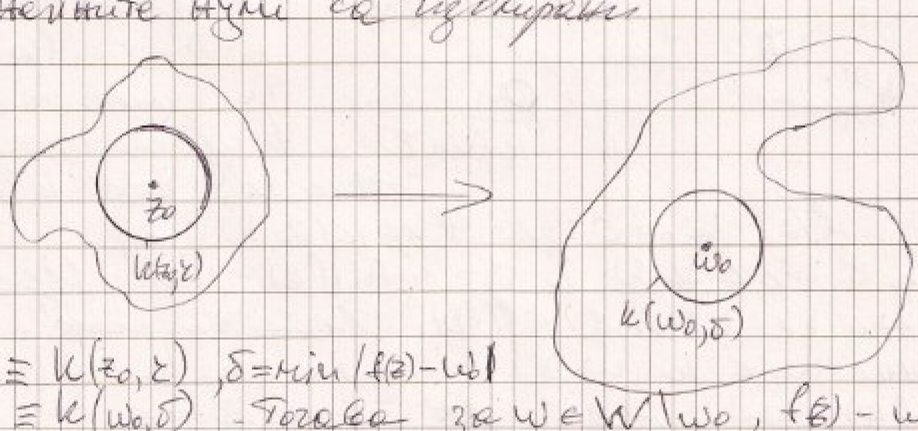


Нека $w_0 \in f(D)$, $z_0 \in D$ е т.ч. $f(z_0) = w_0$. Т.к. нулите на хол. ф-ии са изолирани точки, то $\exists$ кръг $K(z_0, \varepsilon)$ т.ч. $f(z) - w_0 \neq 0$ за $\forall z \in K(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$

Нека $\gamma = \partial K(z_0, \varepsilon)$ и $\delta = \min_{z\in\gamma} |f(z) - w_0|$. Ще докажем че $K(w_0, \delta) \subset f(D)$. Действително: Нека $w_1 \in K(w_0, \delta)$. Имаме че $|w_0 - w_1| < \delta \leq |f(z) - w_0|$, $z \in \gamma$. Th на Руше $\Rightarrow$ $(f(z) - w_0) + (w_0 - w_1) = (f(z) - w_1)$ има толкова

нули в $Th\,\delta = K(z_0, r)$, колкото има $f(z)-w_0$
и значи $f(z)-w_1$ има поне една нула в $K(z_0,r)$
т.е. $\exists\ z_1 \in K(z_0,r)$ т.ч. $f(z_1) = w_1 \Rightarrow w_1 \in f(D)$
Сл. $K(w_0,\delta) \subset f(D)$ и $f(D)$ е отворено мн-во

Th1 (Уточнение)
(На принципа за запазване на областите, използвайки цялата информация от Th на Руше)
Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е обл., f е холоморфна и $\neq const$
$w_0 \in f(D)$ и z_0 е n-кратна нула на $f(z)-w_0$.
Тогава съществуват околности U на z_0 и $W \subset f(U)$ на w_0, т.ч. за $\forall\, w \in W \setminus w_0$, $f(z)-w$ има точно n различни нули в $U \setminus z_0$
Док
Спираме доказателството на принципа за запазване на областите. Избираме r, т.ч. $f(z)-w_0 \neq 0$ за $\forall\, z \in K(z_0,r) \setminus \{z_0\}$ и $f'(z) \neq 0$ $\forall\, z \in K(z_0,r) \setminus \{z_0\}$. Това е възможно защото $(f(z)-w_0)' = f'(z)$, е също холоморфна ф/я в D и нейните нули са изолирани



$U \equiv K(z_0,r)$, $\delta = \min|f(z)-w_0|$
$W \equiv K(w_0,\delta)$ - Тогава за $w \in W \setminus w_0$, $f(z) - w$ има толкова нули в U, колкото има $f(z)-w_0$

т.е. точно и. Всичките са прости нули, защото $f'(z) \neq 0$ за $\forall z \in U \setminus z_0$

Следствие (критерий за локална еднолистност)

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и f е холоморфна ф/я $f: D \to \mathbb{C}$. Тогава f е локално еднолистна в D (т.е. $\forall z \in D$ има околност U, в която f е еднолистна) $\forall z_1 \neq z_2 \in U \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2) \Leftrightarrow f'(z) \neq 0$ за $\forall z \in D$

Док

$\Leftarrow$ Нека $f'(z) \neq 0$ за $\forall z \in D$

От Th1 $(n=1) \Rightarrow f$ е локално еднолистна в D

$\Rightarrow$ Нека f е локално еднолистна в D т.е. $\forall z_0 \in D$, $\exists$ ок. U т.ч. $f(z_1) \neq f(z_2)$, $\forall z_1 \neq z_2 \in U$

Да допуснем че $f'(z_0) = 0$. Това означава че $f(z)$ е поне двукратна нула на $f(z) - w_0$ $(w_0 = f(z_0))$

От Th1 $(n \geq 2) \Rightarrow \forall w \in W / w_0$, $f(z) - w$, има поне две различни нули в U т.е. $\exists z_1 \neq z_2$ т.ч. $f(z_1) = w = f(z_2)$ т.е. f не еднолистна $\Rightarrow$ ↯

3