ИА Харжийски 04.11.14

Th за единственност на степенни редове

Th Ако $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n z^n$ е степенен ред с $R_{cx}=R>0$ и т. $z=0$ е точка на сгъстяване на нули на f, то $f(z)\equiv 0$, $z\in K(0,R)$ т.е. $a_n=0$ за $\forall n$

Док

Допускаме че $f(z)\not\equiv 0$, $z\in K(0,R)$. Тогава $f(z)=a_s z^s + a_{s+1}z^{s+1}\dots$, $a_s\neq 0$, $s\geq 1$ $(f(0)=0)$ т.е. $f(z)=z^s(a_s+a_{s+1}z+\dots)=z^s f(z)$ където $f(z)=a_s+a_{s+1}z\dots$ е стар(и) ред със същия радиус на сходимост $R \Rightarrow$ $f(z)$ – холоморфна в $K(0,R)$. Тъй като $f(0)=a_s\neq 0$, от непрекъснатостта $\Rightarrow \exists$ околност $K(0,\delta)$, $\delta>0$ т.ч. $f(z)\neq 0$ $z\in K(0,\delta)$, $f(z)=z^s f(z)\neq 0$, $\forall z$: $0<|z|<\delta$ $\Rightarrow$ $z=0$ не е т. на сгъстяване ↯

Следствие (Th за идентичност)

Ако $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n z^n$ и $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' b_n z^n$ с един и същи $R_{cx}=R=0$ и $z=0$ е т. на сгъстяване на мн-вото $\{z\in K(0,R): f(z)=g(z)\}$ то $f(z)\equiv g(z)$, $z\in K(0,R)$

Функцията e^z

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\dots+\frac{z^n}{n!}$$ – холоморфна в $\mathbb{C}$ – цяла ф-я

Св-ва

1) $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

2) $e^z\neq 0$, $\forall z$: $e^z e^{-z}=e^0=1\neq 0$

3) $z=iy$, $e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}\dots=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+$

$$+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}\dots\right)=\cos y+i\sin y$$

$y=\pi \Rightarrow e^{i\pi} = -1$

$e^{-iy} = \cos y - \sin y$

Ф-ли на Ойлер

$\cos y = \dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$, $\sin y = \dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$

4) $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$|e^z| = e^x$, $\arg e^x = y + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

5) e^z е периодична с период $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$e^{z+2k\pi} = e^{x+i(y+2k\pi)} = e^z$

$e^{\omega} = 1$, $\omega = u+iv$

$e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i\sin v) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^u\cos v = 1 \\ e^u \sin v = 0 \Rightarrow v = n\pi \end{cases}$

$\Rightarrow e^u \cos n\pi = 1 \Rightarrow e^u(-1)^n = 1 \Rightarrow n = 2k$, $u=0 \Rightarrow$

$\omega = 2k\pi i$

6) Уравнението $e^z = c$, $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ има безброй много решения

Нека $z = x+iy$, $c = re^{i\varphi}$, $r = |c|$, $\varphi = \arg c$

Тогава $e^z = c \Leftrightarrow e^x e^{iy} = re^{i\varphi} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} e^x = r \\ y = \varphi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln r \\ y = \varphi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

7) За изображението $\omega = e^z$

① $(e^z)' = e^z \neq 0$ е конформно $\forall z\in\mathbb{C}$

Деф $f: D \to \mathbb{C}$ се нарича еднолистна в D ако за $\forall$ две различни точки
$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

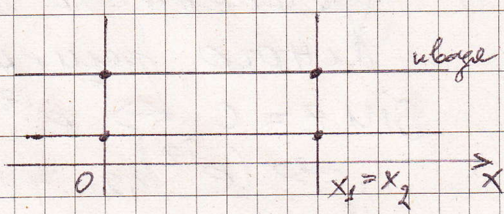
e^z не е еднолистна в $\mathbb{C}$!

Определяне на област в която e^z е еднолистна

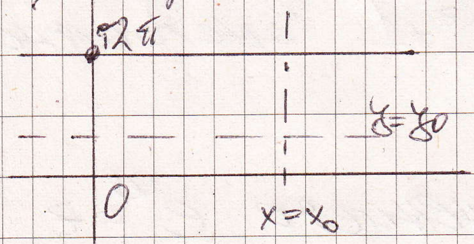
Нека $z_1 \neq z_2$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$ и
$e^{z_1} = e^{z_2}$ т.е. $e^{x_1+iy_1} = e^{x_2+iy_2} \Leftrightarrow$

$$e^{x_1-x_2+i(y_1-y_2)} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ и } y_1 - y_2 = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

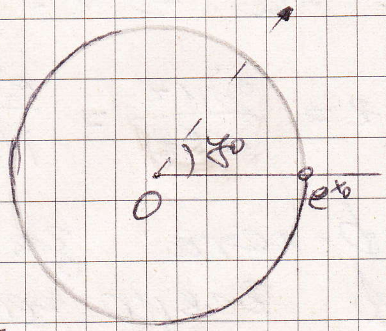
Всяка хоризонтална ивица с ширина $< 2\pi$ е област на еднолистност на e^z



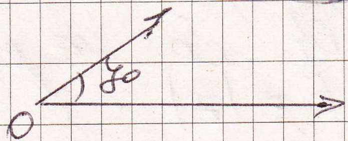
В декартови



$\xrightarrow{w = e^z}$



1) $\{y = y_0\} \xrightarrow{w = e^z} e^x e^{iy_0}$



2) $\{x = x_0\} \xrightarrow{w = e^z} e^{x_0} e^{iy}$ $\quad 0 < y < 2\pi$

$$\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\} \xrightarrow{e^z} \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$$

Функциите $\sin z$ и $\cos z$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$\sin z$ и $\cos z$ са цели ф-ии

$(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$

св-ва

1) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$

$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

2) $\sin z$ и $\cos z$ са периодични с основен период 2π

3) Нулите на $\sin z$ са $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Rightarrow 2z = 2k\pi$ т.е. $k\pi$

Нулите на $\cos z$ са $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

4) уравнението $\sin z = c$ $(\cos z = c)$ има безброй много решения

$\sin z = c \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 2ic \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2ic\,e^{iz} - 1 = 0$

$\Rightarrow (e^{iz})_{1,2} = ic \pm \sqrt{1-c^2} \neq 0$

$e^{iz} = a \Rightarrow z = \ln|a| + (\arg a + 2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$ за $\operatorname{cotg} z$ аналогично

Ф-лата за $\log z$

деф Всяко решение на уравнението $e^{w} = z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ се нарича $\log z$. Ако $w = u+iv$, $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ то

$e^{w} = z \Leftrightarrow e^{u+iv} = re^{i\varphi} \Leftrightarrow e^{u}e^{iv} = re^{i\varphi} \Leftrightarrow$

$\left| \begin{array}{l} e^{u} = r \\ e^{iv} = e^{i\varphi} \text{ т.е. } v = \varphi + 2k\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} u = \ln r \\ v = \varphi + 2k\pi \end{array} \right.$

$w = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$

$\log z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

Пример

$k \in \mathbb{Z}$

$\log 1 = i2k\pi$

$\log(-1) = i(2k+1)\pi$

$\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$\log(-i) = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

Св-ва

1) $e^{\log z} = z, \ \forall z \neq 0$

2) $\log e^{z} = z + i2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

3) $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$

4) $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$

Деф

Нека $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е област. Еднозначен клон на $\log z$ в D се нарича непрекъсната функция ~~за~~ $f: D \to \mathbb{C}$ за която $e^{f(z)} = z, \ \forall z \in D$

Тв Нека $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $f_0 : D \to \mathbb{C}$ е еднозначен клон на $\log z$ в D. Тогава всички еднозначни клонове на $\log z$ в D са от вида

$$f(z) = f_0(z) + i2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$