

Нули на холоморфни функции.
Th за единственост

Th (Единственост на степенни редове)

Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ е степенен ред със $R_0 = R > 0$
Ако z_0 е точка на съствяване на множеството от нулите $\{z \in K(z_0, R) : f(z) = 0\}$ на f , то $f(z) \equiv 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n, z \in K(z_0, R)$

Th 1 (за единственост на холоморфните функции)

Ако $f(z)$ е холоморфна в обл $D \subseteq \mathbb{C}$ и множеството от нулите $\{z \in D : f(z) = 0\}$ има точка на съствяване в D то $f(z) \equiv 0, z \in D$

Заб! Исполнето D да е свързано множество

Пример: $D = K_0 \cup K_1$

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \in K_0 \\ 1, & z \in K_1 \neq 0 \end{cases}$$

K_0 K_1

Исполнето нулите на f да имат точка на съствяване $\emptyset \neq D$ е съществено

Пример: $f(z) = \sin \frac{\pi}{z}$, холоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z_n = \frac{1}{n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, z_n \rightarrow 0$$

но $0 \notin \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) \neq 0$

Следствие: Ако f е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и $f(z) \neq 0, z \in D$, то нулите на f са изолирани точки, т.е. ако $z_0 : f(z_0) = 0$ то $\exists K'(z_0, \delta) = \{0 < |z - z_0| < \delta\}$ т.е. $f(z) \neq 0, z \in K'(z_0, \delta)$

В $\mathbb{R}$ този резултат не е верен

Пример: $f(z) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$x_n = \frac{1}{n}$, ~~$f(x_n) = 0$~~ $f(x_n) = 0$, $x_n \rightarrow 0$
 0 не е изолирана

Зад. Нека $f(z)$ е холоморфна в област D и $\exists z_0 \in D$
 т.е. $f^{(n)}(z_0) = 0$, $n = 0, 1, \dots$

Да се докаже $f(z) \equiv 0$, $z \in D$

Средство е 2 (Тн за идентичност)

Ако $f(z), g(z)$ са холоморфни в област $D \subseteq \mathbb{C}$
 и множеството $\{z \in D: f(z) = g(z)\}$ има точка
 на съставяване в D , то $f(z) \equiv g(z)$ в D , $z \in D$

Деф. z_0 е n -кратна нула на f , ако
 $0 = f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0)$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$

Тн (за представяне на холоморфна ф-я в околност на 0)

Нека $f(z)$ е холоморфна в околност z_0 и z_0 е
 n -кратна нула на f . Тогава $\exists$ околност Q на
 z_0 , т.е.

$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, $z \in Q$, където $g(z)$ е
 холоморфна и $g(z) \neq 0$, $z \in Q$