

КА Хаджийски 1.12.14

Теорема и редове от холоморфни функции

Th 1 Ако $f_n: M \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1, 2, \dots$, $f_n \in C(M)$ и $f_n \xrightarrow{u} f$, то $f \in C(M)$

Следствие 1 Ако $u_n: M \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1, 2, \dots$, $u_n \in C(M)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ е равномерно сходящ в/з M то

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \in C(M)$$

Th 2 Граничен преход под знака на интеграла

Нека $\gamma \subset \mathbb{C}$ е ретифицируема крива $f_n \in C(\gamma)$, $n=1, 2, \dots$ и f_n е равномерно сходящ в/з γ т.е. $f(\gamma) \xrightarrow{u} f$, тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$

Следствие 2 Нека $\gamma \subset \mathbb{C}$ е ретифицируема крива $u_n \in C(\gamma)$ непрекъснати в/з γ , $n=1, 2, \dots$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ е равномерно сходящ в/з γ , тогава

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} u_n(z) dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) dz$$

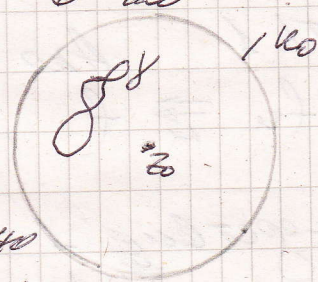
Th 3 (Вайерштрасе) : Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област в комплексната равнина и $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1, 2, \dots$, холоморфни в D и $f_n \xrightarrow{u} f$ в/з комплексните нормирани множества на D Тогава

1) f е холоморфна в D

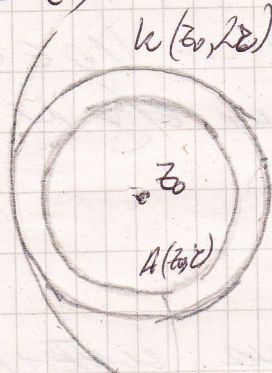
2) $f_n^{(k)} \xrightarrow{u} f^{(k)}$ в/з комплексните нормирани множества

Ако и 1) и 2) $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f$ е непрекъсната в D . Нека $z_0 \in D$ и $U_0 = U(z_0, \varepsilon)$ е т.е. $\overline{U_0} \subset D$. Нека $\gamma \subset U_0$ е затворена крива, $f_n \xrightarrow{\gamma} f$ (γ^* е компактен) Тогава (Th 2) $\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0$

(по T_k на Коши, компактно-едносвързана област)
от T_k (Морера) $\Rightarrow f$ е холоморфна в U_0



Лем 2)



$U(z_0, 2\epsilon)$ Той като всяко компактно
подмножество на D може да се покрие
с краен брой кръгове е достатъчно да
докажем 2) само за кръг CD

Нека $U(z_0, 2\epsilon) \subset D$ и $A(z_0, \epsilon) \subset D$. Нека
 $z_0 \in D$, $\epsilon: U(z_0, 2\epsilon) \subset D$, $\gamma = \partial U(z_0, 2\epsilon)$

От формулата на Коши имаме че

$$(*) \quad f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-z)^{k+1}} dz, \quad \forall z \in U(z_0, 2\epsilon)$$

Ще докажем че $f_n^{(k)} \xrightarrow{A(z_0, \epsilon)} f^{(k)}$. Действително, нека
 $z \in A(z_0, \epsilon)$. Той като $f_n \xrightarrow{\gamma} f$ в компактните
подмножества на D , то $f_n \xrightarrow{\gamma} f$. Тогава за $\forall \epsilon > 0$
 $\exists \delta = \delta(\epsilon)$ т.е. $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, $n > \delta$, $\forall z \in \gamma$.

Сега от (*) $\Rightarrow$

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-z)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f_n(z) - f(z)|}{|z-z|^{k+1}} dz$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^{k+1}} c(\gamma), \quad c(\gamma) = \text{const} \Rightarrow f_n^{(k)} \xrightarrow{A(z_0, \epsilon)} f^{(k)}$$

Следствие 3: Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област. $U_n: D \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1, 2, \dots$
холоморфни функции в D , и $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ е
равномерно сходяща в γ компактни подмножества
на D . Тогава:

- 1) $U(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ е холоморфна в D
- 2) $U^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(k)}(z)$, като редът е равномерно сходящ в/з компактните подмножества на D

Заб. Този резултат не е верен в $\mathbb{R}$

Пр 1. Тн (Вайерштрасе)

Ако $f \in C[a, b]$, то $\exists \{P_n - \text{полиноми}\}_{n=1}^{\infty}$ т.е.
 $P_n \xrightarrow{[a, b]} f$

Пр 2. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $f_n(x) \rightarrow 0$, $f'_n(x) = \cos nx$
 $f'_n(x)$ е разходяща за $x \neq 2k\pi$, при $x = 2k\pi$
 $f'_n(x) = 1 \neq 0$!

Тн на Тейлър. Неравенства за коефициентите
 те. Тн на Лувел. Основна Тн на алгебрата

Тнд (Тн на Тейлър)

Нека f е холоморфна в $K(z_0, R)$. Тогава
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in K(z_0, R)$, където a_n са ертнозначно
 определени, $n = 0, 1, 2, \dots$ с формулата

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$\gamma_R := \{z : |z - z_0| = R, 0 < R < R\}$ където редът е равномерно сходящ в/з компактните подмн-ва на K

Средство Нека $D \subseteq \mathbb{C}$, f е холоморфна в D . Тогава
 $\forall z \in D \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in K(z_0, R)$, $0 < R < \text{dist}(z_0, \partial D)$

Неравенства на Коши за коефициентите в реда на Тейлър

Нека $f(z)$ е холоморфна в пръга $K(z_0, R)$ и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, z \in K(z_0, R). \text{ Тогава } |a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}$$

$$0 < \rho < R, M(\rho) = \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$$

Ако (от формулата за a_n)

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} |dz| \leq \frac{M(\rho)}{2\pi} \frac{2\pi \rho}{\rho^{n+1}}$$

$$= \frac{M(\rho)}{\rho^n}, n=0, 1, \dots$$

Тл на Лувел

Всяка узли и ограничена функция е компактна

Лл на алгебрата

В неконстантен полином с комплексни коефициенти има поне една нула в $\mathbb{C}$

Тл

Нека f е диференцируема в околност на $z_0 \in \mathbb{C}$

Следните твърдения са еквивалентни

- 1) f е $\mathbb{C}$ -диференцируема в околност на z_0
- 2) f е непрекъсната в околност U на z и $\int_{\gamma} f = 0$, $\forall$ затворена крива $\gamma \subset U$

- 3) $f(z)$ се развива в степенен ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |z-z_0|^n$ в околност на z_0