

ЕДУ

Христов

20.10

Пълни системи в $L^2(a, b)$. Метод на Фурье
за смесените заряди на струната и
точилородоводимостта

1) Припомняне $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, D - действителна област
в $\mathbb{R}^n$, f -измеримост: $L^p(D)$ Лебег

$\int_D |f(x)|^p dx$ трябва да съществува
 $L^p(D)$ пространство

Норма на $f(L^p(D))$; $\|f\|_{L^p} = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$

Св-ва

- а) $\|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ почти навсякъде
- б) $\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \|f\|_{L^p}$, $\lambda \in \mathbb{C}$
- в) неравенство на триъгълника
 $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

Матрицата $f(fg) = \|f \cdot g\|_{L^p}$ е разстояние м/у
 f и g елементи

тн (Рис-Фигер) - $L^p(D)$ е точно израз
разн $L^2(D)'$ - има скалярно произведение

Деф. Числото $(f, g) = \int_D f(x) \bar{g}(x) dx$, $f, g \in L^2(D)$

наричаме скалярно произведение. Има
система от функции $\{\varphi_n\} \in L^2(D)$

Лемма. Назовем $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормированной системой, если $(f_n, f_m) = \delta_{nm} \rightarrow f \in 0$ почти на всяком x .

Лемма. Назовем $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in L^2(D)$ ортогональной и нормированной системой, если $(f_i, f_j) = \delta_{ij}$.

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

За всякую функцию f можем считать $f \sim \sum a_n f_n$, $a_n = a_n(f) = \int_D f(x) f_n dx$.

Предложение для доказательства неравенства Бесселя

$$\sum |a_n|^2 \leq \int_D |f(x)|^2 dx$$

Лемма $0 \leq \int_D |f(x) - \sum_{n=0}^N a_n f_n(x)|^2 dx =$

$$\int_D (f(x) - \sum_{n=0}^N a_n f_n) (\overline{f(x) - \sum_{n=0}^N a_n f_n}) dx =$$

$$\int_D |f|^2 dx - \sum_{n=0}^N \overline{a_n} \int_D f \overline{f_n} dx - \sum_{n=0}^N a_n \int_D \overline{f} f_n dx +$$

$$+ \sum_{n,m=0}^N a_n \overline{a_m} \int_D f_n \overline{f_m} dx = \sum_{n=0}^N |a_n|^2 \leq \int_D |f|^2 dx$$

$N \rightarrow \infty$

Когато в неравенството на Бесел се достигне равенство, говорим за равенство на Парсевал

Th 1. Следните условия са еквивалентни

a) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е пълна ортонормирана система

b) $\forall f \in L^2, \lim_{N \rightarrow \infty} \|f(x) - \sum_{n=1}^N a_n f_n\|_2 = 0$

$$a_n = \int_D f \bar{f}_n dx$$

c) Всина е равенството на Парсевал

Примери

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

ортонормалност и норми

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n \bar{f}_m dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(n-m)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ix(n-m)}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\text{при } n = m \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f_n \bar{f}_n dx = 1$$

Лемата Th на Вайерштрас

за $\forall \varepsilon > 0$ и $f \in C[-\pi, \pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$ $\exists$ тригонометричен полином $T_{\varepsilon}(x) = \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx}$ $|f(x) - T_{\varepsilon}(x)| < \varepsilon, [-\pi, \pi]$

$f \in L^2(-\pi, \pi)$. Можем да намерим непрекъсната $h(x) : h(\pi) = h(-\pi)$. Неравенството на Лебел

$$\|f - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{за } h(x) \in T_{\varepsilon}(x) \text{ т.е. } |h(x) - T_{\varepsilon}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|f - T_\varepsilon(x)\|_{L^2} \leq \|f - h\|_{L^2} + \|h - T_\varepsilon(x)\|_{L^2} < \varepsilon$$

Пример 2 Система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, n=1, 2, \dots, [-\pi, \pi]$$

е ортонормирана и пълна

$$x \rightarrow \frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\cos \frac{\pi nx}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{\pi nx}{L}}{\sqrt{L}}, n=1, 2, \dots$$

Th 2 Нека $f(x) \in C^1(-L, L)$ т.е. $f(L) = f(-L)$
 Тогава $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i \frac{\pi nx}{L}}$ е равномерно
 сходяща в $[-L, L]$

Ако разгн $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2L}} e^{i \frac{\pi nx}{L}}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L f(x) e^{i \frac{\pi nx}{L}} dx =$

$$= -\frac{L}{i\pi} \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L f(x) d e^{-\frac{i\pi nx}{L}} = -\frac{L}{i\pi} \frac{1}{\sqrt{2L}} \frac{f(x) e^{-\frac{i\pi nx}{L}}}{\frac{-i\pi n}{L}} \Big|_{-L}^L$$

$$+ \frac{L}{i\pi} \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L f'(x) e^{-\frac{i\pi nx}{L}} dx$$

a'_n - коефициента на Фурие за f'

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_n = \frac{L}{i\pi} a'_n}}$$

$$|a_n| \approx \left| \frac{a'_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} (|a'_n|^2 + 1/n^2), a_n = \int_0^1 f(x) e^{i \frac{\pi n x}{L}} dx$$

$$\left| \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2L}} e^{i \frac{\pi n x}{L}} \right| \leq \sum_1^{\infty} |a_n| < \infty \text{ по Вейерштрасс}$$

Тогава ред е равномерно сходящ

$$g(x) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2L}} e^{i \frac{\pi n x}{L}} \quad / \cdot e^{-i \frac{\pi n x}{L}} \Rightarrow$$

$$g(x) e^{-i \frac{\pi n x}{L}} = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2L}} e^{i \frac{\pi (n-k)x}{L}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L g(x) e^{-i \frac{\pi n x}{L}} dx = \sum_1^{\infty} a_n \int_{-L}^L \frac{e^{i \frac{\pi (n-k)x}{L}}}{\sqrt{2n} - \sqrt{2L}} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L g(x) e^{i \frac{\pi n x}{L}} dx \Rightarrow f \equiv g$$

Следствие

$f(x) \in C^m[-L, L]$, $f^{(B)}(L) = f^{(B)}(-L)$, $S=0$ и
 Тогава $f^{(B)}(x) = \sum_1^{\infty} \frac{a'_n}{\sqrt{2L}} \left(\frac{i \pi n}{L} \right)^s e^{i \frac{\pi n x}{L}}$ е
 равномерно сходящ $[-L, L]$

2) Уточ на формула за смещената задача на струната

(1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $t \geq 0$, $x \in [0, 2]$ (схематично)

(2) $\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi_0(x) \\ u|_{t=0} &= \varphi_1(x) \end{aligned} \right\}$ дефинирани в интервала $[0, 2]$
 Необходимото условие

$$(3) u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ (Граничные условия)}$$

$$(4) u(x, t) = X(x)T(t) - \text{заменяем (3) в (1) и берем дифференцирование} \Rightarrow$$

$$\ddot{T}(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$-\lambda = \text{const} \Rightarrow 2 \text{ уравнения (5) и (6)}$$

$$(5) X'' + \lambda X = 0; \quad (6) \ddot{T} + \lambda a^2 T = 0$$

$$\text{заменяем (4) в (3)} \Rightarrow X(0)T(t) = 0 = X(L)T(t) \Rightarrow X(0) = X(L) = 0$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{array} \right. \text{ задача на Эйри-Лувена}$$

$$X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow \mu^2 + \lambda = 0$$

$$a) \lambda = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 + C_2 x$$

$$b) \lambda < 0 \Rightarrow \mu = \pm \sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$c) \lambda > 0 \Rightarrow \mu = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

$$\text{Рассматриваем } a) X(0) = C_1 = 0, X(L) = C_2 L = 0 \Rightarrow C_2 = 0, x = 0$$

не интересуют

$$b) X(0) = C_1 + C_2 = 0, X(L) = 0 = C_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}L}, x = 0$$

не интересуют

$$c) X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, X(x) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, X(L) = 0 = \sin \sqrt{\lambda}L = 0, \sqrt{\lambda}L = k\pi$$

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, k = 1, 2, \dots - \text{спектр}$$

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{L}x, k = 1, 2, \dots \text{ собственные функции}$$

