

ЕЛЗ Христова 15.12.14

Средствата от интеграла на Поассон

- 1) $\Delta u = 0$ в K -кълото с радиус R и център O
- 2) $u|_{\partial K=S} = f(p) \in C(S)$

$$3) u(p_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{R^2 - p_0^2}{\varepsilon^3(p, p_0)} f(p) dS, \text{ където}$$

$$p_0 \in K, \quad p_0 = \varepsilon(0, p_0)$$

Т.е. Нека $u(x, y, z)$ е хармонична в D .

Тогав $u(x, y, z)$ е аналитична по x, y, z в D

Тогава

Нека O произволна в D и нека K е кълбо с център O и радиус R , $K \subset D$, $S = \partial K$

$$u(p_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{R^2 - p_0^2}{\varepsilon^3(p, p_0)} f(p) dS$$

Δ е трансляционен - инвариантен без ограничения на общността, т.е. $O \equiv$ началото на K система

$$p = (x, y, z), \quad p_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\varepsilon^3(p, p_0) = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right]^{3/2}$$

$$[R^2 = \varepsilon^2(x-x_0 + y-y_0 + z-z_0) + p_0^2]^{3/2} =$$

$$= R^3 \left[1 - 2 \frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{R^2} + \left(\frac{p_0^2}{R^2} \right) \right]^{3/2}$$

$$u_0: \varepsilon(0, p_0) = \rho R, \quad \rho < \sqrt{2-1-|xx_0+yy_0+zz_0|} \leq$$

$$\leq |x|/|x_0| + |y|/|y_0| + |z|/|z_0| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}/\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} = R/R_0$$

$$= R/R_0$$

$$\left| -2 \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{R^2} + \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right| \leq 2 \frac{R_0 R}{R^2} + \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 =$$

$$= 2q + q^2 < 1$$

$$\text{Нека } \gamma = -2 \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{R^2} + \frac{R_0^2}{R^2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^3(P, P_0)} = \frac{1}{R^3} (1 + \gamma)^{-3/2} = \frac{1}{R^3} \left[1 + \binom{-3/2}{1} \gamma + \binom{-3/2}{2} \gamma^2 + \dots \right]$$

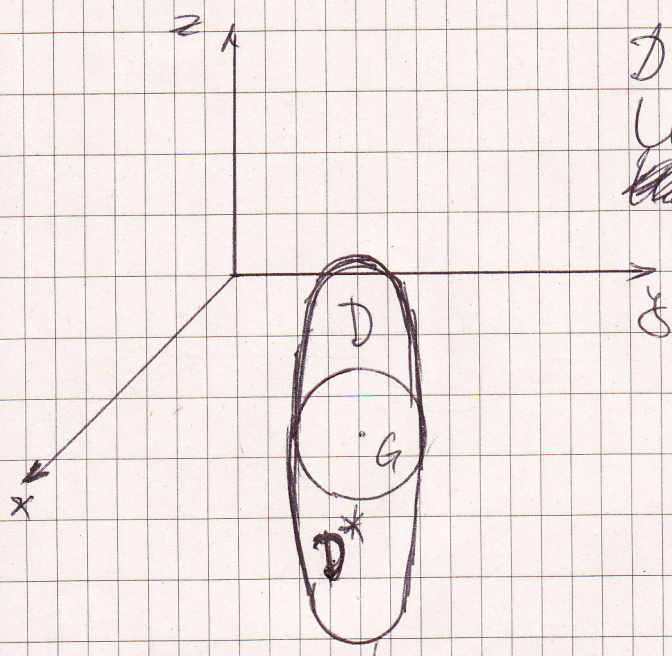
$$\left| \frac{1}{\varepsilon^3(P, P_0)} \right| \leq \frac{1}{R^3} \left(1 + \left| \binom{-3/2}{1} \right| (2q + q^2) + \dots + \left| \binom{-3/2}{n} \right| (2q + q^2)^n \right)$$

$\frac{1}{\varepsilon^3(P, P_0)}$ е равномерно сходяща редица и е абсолютно сходяща редица в $S \times K_0$

$$U(P_0) = \iint_S \frac{R^2 - R_0^2}{R^3} f(P) \left\{ 1 + \binom{-3/2}{1} \left(-2 \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{R^2} + \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{R^2} \right) + \dots \right\} dS$$

Th 2 (Обратна на средното аритметично)

Нека $U(P)$ е непрекъсната в обл D и за всяка сфера $S_\varepsilon(O)$, съдържаща се в D е изпълнено $U(P_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon(O)} U(P) dS$. Тогава $U(P_0)$ е хармонична



$$D = \{(x, y, z) : z > 0\}$$

$u(x, y, z)$ в D е хармонична
 ~~$u=0$ в/з $G \in D \cap z=0$~~

$$u=0 \text{ в/з } G \in (D \cap z=0)$$

Th 3 Принцип за симетрията

u е хармонична в $D \cup \{z=0\}$ и $G \in \{D \cap \{z=0\}\}$

и в/з G функцията $u(x, y, 0)$ се нулира.

Това ва u може да се продължи хармонично
 в $\Omega = \{D \cup G \cup D^*\}$, където D^* е огледалният
 образ на D относно $z=0$