

Ем Ч Христов

05.01.15

Гранични задачи за уравнения на Лаплас

$$\Delta u = 0 \quad s \in \mathbb{R}$$

$$u|_S = f(p) \rightarrow \text{интеграл на Грасман}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{R}^2$$



при  $n=3$  т.е.  $\mathbb{R}^3$

1) Внутренняя задача на Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ в } D, \quad D \text{ - область заданная и ограничена в } \mathbb{R}^3$$

$$\partial D = \Gamma, \quad u|_{\Gamma} = f_1(p)$$

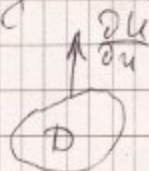


$D^V$  - внешность

2) Внешняя задача на Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ в } D^V, \quad u|_{\Gamma} = f_1(p)$$

3) Задача на Нойман (внутренняя)



$\Gamma$

$$\Delta u = 0 \text{ в } D$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = f_2(p)$$

4) Внешняя задача на Нойман

$$\Delta u = 0 \text{ в } D^V$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = f_2(p)$$



$D^V$

5) Задача на Робин

$$\Delta u = 0 \text{ в } D$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + a(p)u|_{\Gamma} = f_3(p)$$

$D$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$

$V \in C(D)$  - непрекъсната в тази област  
 дефинираме средната функция, и - където  
 $U \subset D$ ,  $\partial U = \bar{U} - U$  - граница

$(V)_U = \begin{cases} V & D \setminus U \\ U & U \end{cases}$ , и е хармонична функция,  
 която  $U|_{\partial U} = V$ , което  
 значи се може да се построи

Деф функцията  $V \in C(\bar{D})$ , наричаме  
 суперхармонична, ако:

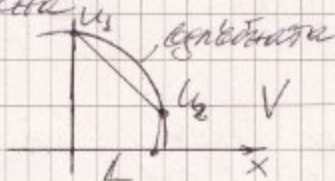
1)  $(V)_U \leq V$  за  $\forall$  където  $U \subset D$ , свободната.  
 функцията  $V \in C(\bar{D})$  наричаме субхармонична  
 ако:

2)  $(V)_U \geq V$  - извивката

$R'$  и  $U'' = D$ , т.е.  $U(x) = ax + b$ ,  $D = (r)$   
 Очевидно е хармонична

отговор по Гурки

$$U|_r = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$



$$(V)_L = \begin{cases} V & R' \setminus L \\ U & L \end{cases}$$

Св-ва на суперхармоничните функции:

- 1)  $\Sigma$  на две суперхармонични ф-ии е суперхармонична ф-ия
- 2) Ако  $V(P)$  е суперхармонична, то  $-V(P)$  е субхармонична
- 3) Ако  $V(P)$  е суперхармонична и  $U(P)$  е хармонична  
 Тогава  $V(P) \pm U(P)$  е суперхармонична

4) Нека  $V_1, \dots, V_n$  (устройства) са суперхармонични  
Тогав  $V(P) = \min(V_1(P), \dots, V_n(P))$  е суперхармонична  
fun

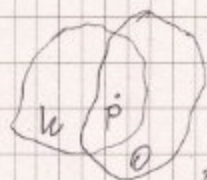
- 1)  $V(P)$  - непрекъсната
- 2)  ~~$V_k$~~   $(V)_k \leq V$ ,  $P \in D$ ,  $V(P) = V_3(P)$ ,  $(V_3)_k \leq V_3$   
избираме си произволно  $k$

$$\boxed{(V)_k(P) \leq (V_3)_k(P) \leq V_3(P) = V(P)}$$

по функцията на максимума

5) Принцип на минимума  
Всяка суперхармонична ф/в в която  
достига минимума си в  $D$  е константа

- a)  $V(P)$  е суперхармонична,  $k \in D$   
 $Z(P) = (V)_k(P)$ ,  $Z(P)$  е суперхармонична



$$k \cap D \neq \emptyset$$

1)  $Z(P)$  - непрекъсната

2)  $0$  - произволно

$$Z_0(P) \leq Z(P)$$

$$\text{Път } P \notin D, Z(P) = Z_0(P) !$$

$$\text{Път } P \notin k$$

$$Z(P) = V(P) \geq Z_0(P)$$

$$\textcircled{3} \quad P \in D, P \notin k, Z(P) = (V)_k(P) = \begin{cases} V & P \in D \setminus k \\ 0 & P \in k \end{cases}$$

$$(Z)_0 = (V)_0 \leq V \quad \text{за } (V)_0 \leq V$$

Път  $P \in k \cap D$ ,  $P \in k, P \in D$  т.е.  $(Z)_0 \leq Z$  в/у  
едната граница както и в другата. Разглед  
 $Z(P) - \text{~~не~~ } (Z)_0(P) \geq 0$ , като  $(Z)_0(P)$  е хармонична, но и  $Z(P)$  е  
хармонична  $\rightarrow Z(P) - (Z)_0(P)$  е хармонична по функцията  
на максимума