ЧДУ Христов 02.10.14

I гр. Вълново уравнение
$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \text{ - хиперболично}$$

II гр. У-е на Лаплас
$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ - елиптично}$$

III гр. У-е на топлопроводимостта
$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \text{ - параболично}$$

линейни ЧДУ от II-ри ред с две неизвестни променливи

(1) $\underline{a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$

a, b, c са т.е. $|a| + |b| + |c| \neq 0$

$a, b, c : (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

(2) $\boxed{\Delta(x,y) = b^2 - ac}$!

а) ако $\Delta(x,y) > 0$ в $D_1 \subset D$ то у-то (1) е хиперболично
б) ако $\Delta(x,y) = 0$ в $D_1 \subset D$ то у-то (1) е параболично
в) ако $\Delta(x,y) < 0$ в $D_1 \subset D$ то у-то (1) е елиптично

Деф Под характеристика на (1) ние разбираме крива $\gamma : \varphi(x,y) = 0$ в дефиниционната област на коефициентите и удовлетворяваща

(3) $a(x,y)(\varphi_x)^2 + 2b(x,y)\varphi_x\varphi_y + c(x,y)(\varphi_y)^2$
$(x_0,y_0) \in \gamma$, $\varphi_y(x,y) \neq 0$

①

От Тh за неявната функция в околнос[т]
на x_0, y_0 $\exists\, y = y(x)$ удовлетворяваща
$\Phi(x, y(x)) = 0$
диференцираме по x $\Rightarrow$

$$\Phi_x + \Phi_y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$$

в (3) делим по $(\Phi_y)^2$ за да получим

$$a(x,y)\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_y}\right)^2 + 2b(x,y)\left(\frac{\Phi_x}{\Phi_y}\right) + c(x,y) = 0 \Rightarrow$$

$$a(x,y)(y')^2 - 2b(x,y)y' + c(x,y) = 0$$

аналогично за (x_0, y_0), $\Phi_x(x_0, y_0) \neq 0$
Тh за НФ $x = x(y)$

$\Phi(x(y), y) = 0$, диференцираме по y

$$\Phi_x x' + \Phi_y = 0 \Rightarrow x'(y) = -\frac{\Phi_y}{\Phi_x}$$

в (3) делим по $(\Phi_x)^2 \Rightarrow a(x,y) + 2b(x,y)\frac{\Phi_y}{\Phi_x} + c(x,y)\left(\frac{\Phi_y}{\Phi_x}\right)^2$

$$\Rightarrow a(x,y) + 2b(x,y)x' + c(x,y)(x')^2 = 0$$

от 2-те уравнения с y' и x' $\Rightarrow$

(4) $a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)\,dx\,dy + c(x,y)(dx)^2 = 0$

(4) е характеристично уравнение
Канонизация! само за две независими променливи

а) Нека у-то (1) е хиперболично т.е.
$\Delta(x,y) = b^2 - ac > 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

$$a\,dy - (b \pm \sqrt{\Delta})\,dx = 0$$

$$\Downarrow$$

$\psi_1(x,y) = c_1$, $\psi_2(x,y) = c_2$ – корени на у-то

Полагаме $\left|\begin{array}{l}\xi = \psi_1(x,y)\\ \eta = \psi_2(x,y)\end{array}\right\} \Rightarrow u_{\xi\eta} = \tilde{F}$ – каноничен вид на хиперб. у-е

б) Нека у-то е параболично т.е. $\Delta = 0$
Има само една характеристика $\psi_1(x,y) = c_1$
Избираме втората функция т.ч. да е изпълнено:

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x,y)} \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\end{pmatrix}$$ Якобиане $\neq 0$

$\left|\begin{array}{l}\xi = \psi_1(x,y)\\ \eta = \psi_2(x,y)\end{array}\right\} \Rightarrow u_{\eta\eta} = \tilde{F}$ – каноничен вид на параболичното у-е

в) Нека ур-ето е елиптично т.е. $\Delta < 0$

Имаме комплексни характеристики
$\varphi_1(x,y) \pm$; $\varphi_2(x,y)$

Полагаме $\left|\begin{array}{l}\xi = \varphi_1(x,y)\\ \eta = \varphi_2(x,y)\end{array}\right\} \Rightarrow$ $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \tilde{F}$ - каноничен вид на елиптичното у-е

Зад.

(1) Там където у-то е хиперболично го канонизирайте, $u_{yy} - \frac{x}{y} u_{xy} + \frac{2}{3y} u_y = 0$

Реш. $a = 0$ (няма u_{xx}), $b = -\frac{1}{2}\frac{x}{y}$ (от $-2b(x,y)u_{xy}$) def

$c = 1$ (от u_{yy}). $\Delta = b^2 - 4ac = \frac{1}{4}\frac{x^2}{y^2} \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$0(dy)^2 + \frac{x}{y}dx\,dy + (dx)^2 = 0$$

$dx\left(dx + \frac{x}{y}dy\right) = 0 \Rightarrow dx = 0$ (т.е. $x = const$) и

$$dx + \frac{x}{y}dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x + \ln C$$

т.е. $xy = C_2$ и $x = C_1$

$\boxed{\left|\begin{array}{l}\xi = xy\\ \eta = x\end{array}\right.}$

$\xi_x = y$, $\xi_y = x$

$\xi_{xy} = 1$, $\xi_{xx} = 0$, $\xi_{yy} = 0$

$\eta_x = 1$ - останалите са 0

$u(\xi(x,y), \eta(x,y))$, $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$,

(4)

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi\xi_{yy} +$$

$$+ u_{\xi\eta}\eta_y\xi_y + u_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + u_\eta\eta_{yy}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} +$$

$$u_{\xi\eta}\eta_x\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\eta\eta_{xy}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = y u_\xi + u_\eta \,;\quad u_y = x u_\xi \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}x^2 + 2\overset{=0}{u_{\xi\eta}} \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}xy + u_\xi + u_{\xi\eta}x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\cancel{u_{\xi\xi}x^2} - \frac{x}{y}\left(\cancel{u_{\xi\xi}xy} + u_\xi + u_{\xi\eta}x\right) + \frac{2}{3y}xu_\xi = 0$$

$$-\frac{x^2}{y}u_{\xi\eta} - \frac{xu_\xi}{y} + \frac{2}{3y}xu_\xi = 0$$

$$-xu_{\xi\eta} - \frac{1}{3}u_\xi = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = -\frac{1}{3\eta}u_\xi$$

Полагаем $u_\xi = v \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = -\dfrac{v}{3\eta}$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\eta}{3\eta} \Rightarrow \log v = -\frac{1}{3}\ln\eta + c(\xi)$$

$\ln v = -\ln\eta^{1/3} + \ln c(\xi)$ т.е. $v\eta^{1/3} = c(\xi) \Rightarrow$

$$v = \frac{c(\xi)}{\sqrt[3]{\eta}} \quad ; \quad u_\xi = v = \frac{c(\xi)}{\sqrt[3]{\eta}}$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{\sqrt[3]{\eta}} \int c(\xi)\,d\xi + D(\eta)\,)!)$$

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{\sqrt[3]{\eta}}\,c(\xi) + D(\eta)$$

$$u_{xy} = \frac{1}{\sqrt[3]{\eta}}\,C(xy) + D(x)$$ – Общ. решение

6