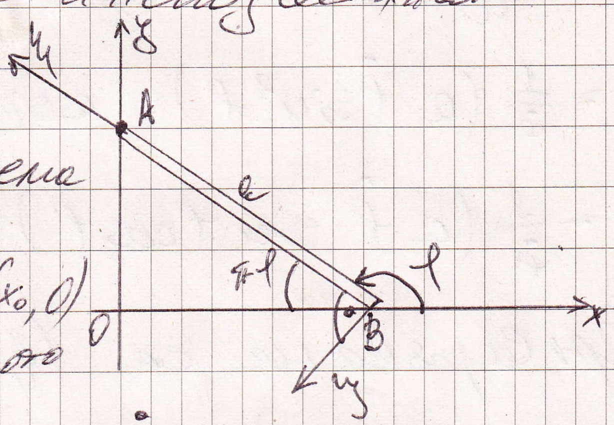
AM 12.11.14

Зад. Равнинно движение на тяло

Лост $AB = a$ се движи т.ч. края A е винаги на оста y (вертикална стена), а края B е винаги на оста ~~y~~ x (хоризонтална стена). Намерете подвижната и неподвижната центроиди



ξ, η - свързана координатна система

Избираме т. B за фокус, $B(x_0, 0)$ неподвижна точка на движещото се тяло

Базата: (x_i, y_i), $x_i = x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega}$, $y_i = y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}$

където $(x_0 y_0)$ са координатите на неподвижната точка на движещото се тяло. (спрямо тялото) Тази точка $B(x_0, 0)$ се движи в неподвижната координатна система $(x\, y)$. ω е моментната скорост на въртене ~~спрямо~~ на тялото спрямо моментният център на скоростите (x_i, y_i). Базата е траекторията на моментният център на скоростите в неподвижната коорд. система

$B(x_0, 0)$, $x_0 = a\cos(\pi - \varphi) = a(\cos\pi\cos\varphi + \sin\pi\sin\varphi) =$
$= -a\cos\varphi$, $y_0 = 0$

$x_i = -a\cos\varphi$, $y_i = \frac{a\dot{\varphi}\sin\varphi}{\dot{\varphi}} = a\sin\varphi$

Окръжност с радиус a и център O

Рулетката $(\xi_1; \eta_1)$ е траекторията на моментния център на скорост в движещата се координатна система

$$\xi_1 = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_0 \sin\varphi - \dot{y}_0 \cos\varphi), \quad \eta_1 = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_0 \cos\varphi + \dot{y}_0 \sin\varphi)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\dot\varphi}(a\dot\varphi \sin^2\varphi) = a\sin^2\varphi$$

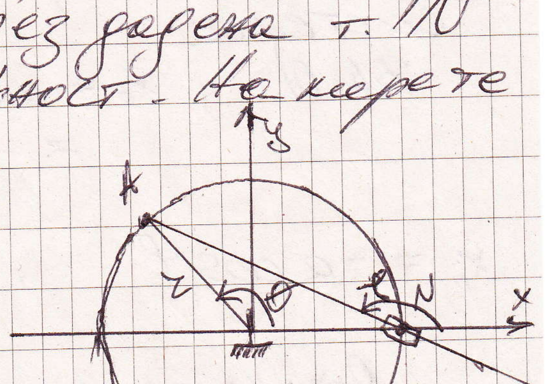
$$\eta_1 = \frac{1}{\dot\varphi}(a\dot\varphi \sin\varphi\cos\varphi) = a\sin\varphi\cos\varphi$$

Проверяваме че $\left(\xi - \frac{a}{2}\right)^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow$

окръжност с център средата на AB и радиус $\frac{a}{2}$

$$\left(a\sin^2\varphi - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = a^2\left(\sin^4\varphi - \sin^2\varphi + \frac{1}{4} + \cos^2\varphi\sin^2\varphi\right) =$$
$$= a^2\left(\sin^2\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - \sin^2\varphi + \frac{1}{4}\right) = \frac{a^2}{4}$$

Зад. Прът AB се движи по такъв начин че една от неговите точки A описва окръжност с радиус r и център в т. O, а самият прът преминава постоянно през дадена т. N лежаща на тази окръжност. Намерете двете центроиди.



Реш. $r = const$
$\varphi = \varphi(t), \ \omega = \dot\varphi$

Избираме неподвижна т. в тялото да бъде т.А

$x_0 = r\cos\theta$, $y_0 = r\sin\theta$ са координатите на т. A

Базата $(x_1; y_1)$

$$x_1 = x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega} = r\cos\theta - 2\frac{r\dot{\theta}\cos\theta}{\dot{\theta}} = -r\cos\theta$$

$$y_1 = y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} = r\sin\theta - 2\frac{r\dot{\theta}\sin\theta}{\dot{\theta}} = -r\sin\theta$$

(x_1, y_1) - окръжност

θ се намира чрез

$$\theta + 2(\pi - \varphi) = \pi \Rightarrow 2\varphi = \theta + \pi$$

$$\varphi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \dot{\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{2}$$

Рулетката $(\xi_1; \eta_1)$

$$\xi_1 = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_0 \sin\varphi - \dot{y}_0\cos\varphi) = \frac{2}{\dot{\theta}}(-r\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi - r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi)$$

$$= -2r\cos(\theta - \varphi) = -2r\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_0\cos\varphi + \dot{y}_0\sin\varphi) = \frac{2}{\dot{\theta}}(-r\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi)$$

$$= 2r(\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta) = 2r\sin(\varphi - \theta) =$$
$$2r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Рулетката е с координати (ξ_1, η_1), която е окръжност в движещата се координатна система със радиус $2r$ и център - центъра на движещата се коорд. система - т. A

③

Движение на тяло около неподвижна точка (въртене)

Зад. Тяло се движи около неподвижна т. O в някакъв момент t_0 неговата ъглова скорост с вектор, чиито проекции върху коорд-те оси са $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$. Намерете в този момент скоростта $\vec{v}$ на точката на тялото с координати $\sqrt{12}, \sqrt{20}, \sqrt{28}$. Неподвижната точка принадлежи на тялото но може и да не принадлежи на него

Реш. По деф ротацията $\vec{\omega}$ на едно тяло е вектор, чиято посока е по оста на въртене на тялото в даден момент и големина равна на производната по времето на ъгъла на завъртане $\varphi(t)$, $|\vec{\omega}| = \dot{\varphi}$. По Т. на Шал, скоростта на произволна фиксирана т. P от тялото

$$\vec{V_P} = \vec{V_O} + \vec{\omega} \times \vec{\rho_P} \quad \text{където}$$

т. O е произволна фиксирана точка на тялото $\vec{\omega}$ е по ос минаваща през т. O. $\vec{\rho_P} = \vec{OP}$

Ротацията е около ос минаваща през O

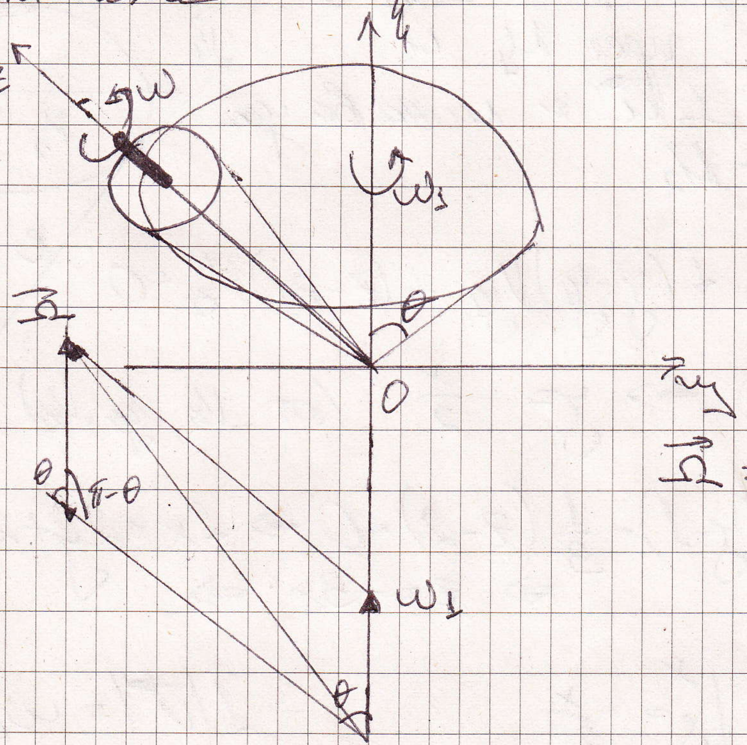
$$|\vec{\omega}| = (\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}), \quad |\vec{\rho_P}| = (\sqrt{12}, \sqrt{20}, \sqrt{28}), \quad |\vec{V_O}| = 0$$

заместваме във формулата на Шал

$$\vec{V_P} = \vec{0} + (\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}) \times (\sqrt{12}, \sqrt{20}, \sqrt{28}) = \vec{0}$$

Следователно дадената т. P е върху моментната ос на въртене

Зад. Оста Oz на пумпал се върти равномерно около вертикалната ос $O\zeta$ и описва конус с ъгъл 2θ, ъгловата скорост на въртене на оста Oz около $O\zeta$ е ω_1, а ъгловата скорост на въртене на пумпала около собствената си ос е ω. Да се определи абсолютната ъглова скорост на пумпала



$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}$

Абсолютната ъглова скорост на пумпала $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}$. По косинусовата теорема

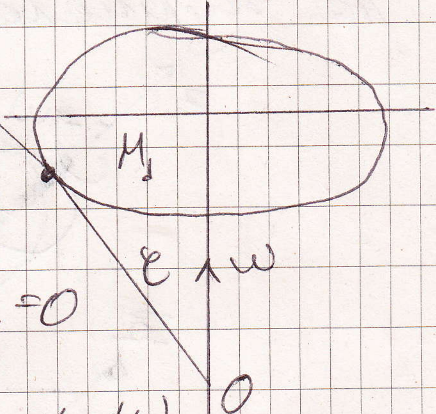
$$|\vec{\Omega}|^2 = |\vec{\omega}_1|^2 + |\vec{\omega}|^2 - 2|\vec{\omega}||\vec{\omega}_1|\cos(\pi-\theta)$$

$$|\vec{\Omega}| = \sqrt{|\vec{\omega}_1|^2 + |\vec{\omega}|^2 - 2|\vec{\omega}||\vec{\omega}_1|\cos(\pi-\theta)}$$

Зад. Намерете уравненията на моментната ос на въртене и величината на ъгловата скорост ω на тяло, ако е известно, че компонентите на скоростта на т. M_1 $(0,0,2)$ спрямо координатната система свързана с тялото са $V_{x_1}=1\,m/sec$, $V_{y_1}=2\,m/sec$, $V_{z_1}=0$

Направлението на скоростта на т M_2 $(0,1,2)$ се определя от вектора $\vec{u}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Реш. Оста на въртене е пресечната права на равнината $\perp \vec{V_1}$ и минаваща през M_1 и равнината $\perp \vec{u}$ и минаваща през т M_2



! $(x-x_1)V_{x_1}+(y-y_1)V_{y_1}+(z-z_1)V_{z_1}=0$

$x+2y=0 \rightarrow y=-\frac{x}{2}$ (от $V_{x_1}, V_{y_1}, V_{z_1}$)

$-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}(y-1)-\frac{1}{3}(z-2)=0 \Rightarrow 2x-2y+2+z-2=0$

$\Rightarrow z=-3x \Rightarrow$

правата е $\begin{cases} x \\ y=-\frac{x}{2} \\ z=-3x \end{cases}$! $|\vec{v}|=\omega\varepsilon$

$\vec{\omega}=a\left(1,-\frac{1}{2},-3\right)$ - Избираме т. в/у правата, удобна т.е. $(0,0,0)$. Тогава $\vec{r}=(0,0,2)$ радиус вектор до т. M_1 - $\vec{V_1}=(1,2,0)$, $\vec{V_1}=\vec{r_1}\times\vec{\omega}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ a & -\frac{a}{2} & -3a \end{vmatrix}=$

$=(a,2a,0)=(1,2,0) \rightarrow a=1$!

т.е. $\vec{\omega}=\left(1,-\frac{1}{2},-3\right)$, $|\vec{\omega}|=\sqrt{1^2+\frac{1}{4}+9}=\frac{\sqrt{41}}{4}\simeq 3{,}2\,rad/sec$