ДМ 9.04.14

Представяне на булеви функции като полиноми
II-ри начин – с преобразуване

$\bar{x} = 1 + x$

$x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}} = 1(1+x)(1+y) = x + y + xy$

$x \Leftrightarrow y = 1 + x + y$

$x \to y = 1 + x(1+y) = 1 + x + xy$

$x \mid y = 1 + xy$

$x \downarrow y = 1 + x + y + xy$

$\overline{xy \to z} \vee y = \overline{1 + xy(1+z)} \vee y = (1 + 1 + xy + xyz) \vee y =$
$= (xy + xyz) \vee y = xy + xyz + y + xy^2 + xy^2z =$
$\cancel{xy} + \cancel{xyz} + y + \cancel{xy} + \cancel{xyz} = y$

Критерий на Пост

f, g, h – можем да съчетаваме $f(.)g(..) \to$
$f(g(x,y))$ или
$g(f(x),y)$

def Мн-во булеви функции от чиито елементи можем ~~да~~ по този начин да построим $\forall$ булеви функции се наричат пълни

def Ако при премахване на коя да е функция пълнотата се губи, мн-вото се нарича базис

КНФ: $\wedge$ (умн), $\overline{}$, $\vee$ – $(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})$ – пълно мн-во

ДНФ: $\wedge$, $\overline{}$, $\vee$ – пълно

Полином: $+$, $\cdot$, 1 – пълно

От първото мн-во можем да махнем $\wedge$ или $\vee$ защото $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$. Значи $\vee$, $\overline{}$ е пълно. Значи $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$ не е базис. По същия начин $\wedge$, $\overline{}$ – базис

1

Базис – $\wedge, \neg$; $\vee, \neg$; $+, \wedge, 1$

Има базиси с 1 елемент

Пример $\{|\}$ (черта на Шефер) – $x|y = \overline{xy}$

Да изразим някои функции с чертата на Шефер

$\overline{x} = x|x$

$x|(x|x) = x|\overline{x} = \overline{x\overline{x}} = \overline{0} = 1$ т.е. 1 се изразява с $x|(x|x)$

0 се изразява с $(x|(x|x))|(x|(x|x))$

$x \wedge y$ се изразява с $(x|y)|(x|y)$

$x \vee y$ се изразява с $(x|x)|(y|y)$

Понеже имаме $\neg$ и $\wedge$, $\forall$ др се изразява

Пример $x \to (y \vee z) = \overline{x} \vee (y \vee z) =$

$= (x|x) \vee [(y|y)|(z|z)] = [x|x]|(x|x)]|[[(y|y)|(z|z)]|[(y|y)|(z|z)]]$

Кои мн-ва са пълни?

Клас T_0 : $f(0,0 \dots 0) = 0$ } затворени

Клас T_1 : $f(1,1, \dots 1) = 1$

Деф. Нека S е мн-во от бул. ф-ии. Ако с ф-ии от S можем да построим само ф-ии, които са вече в S, то S се нарича затворено (т.е. не можем да излезем от S).

(Ако $T \subsetneq S$ то T не е пълно, ако $S \subsetneq F$)

Клас L – линейни функции – които ги запишем като полином, в него няма умн. (само събиране)

Клас M – монотонни функции – Ако $x_1 \leq y_1 \dots x_n \leq y_n$ то тогава $f(x_1 \dots x_n) \leq f(y_1 \dots y_n)$

Клас S – самодвойнствени функции –

$f(x_1 \dots x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2} \dots \overline{x_n})} = f^*$

Класовете T_0, T_1, L, M, S са затворени

Ако P има поне по една ф-я извън $\forall$ от тези класове, то P е пълно (критерий на Пост)

	$\wedge$	$\neg$
T_0	√	x
T_1	√	x
L	x	√
M	√	x
S	x	√

Пълно мн-во по критерий

Как познаваме дали f е в даден клас

за T_0 - лесно и T_1 - лесно

L - ако няма умножение след изработване на полинома

S - I-ви начин - Проверяваме дали $f = f^*$ т.е. дали $f(x) = \overline{f(\overline{x})}$

II-ри начин - Таблица и гледаме дали в последната колона на симетрична позиция стоят различни неща

M - f е монотонна ако: $\forall x_1 \dots x_n$, $\forall y_1 \dots y_n$ $(y_1 \ge x_1$ и $y_2 \ge x_2$ ... и $y_n \ge x_n) \Rightarrow f(x_1 \dots x_n) \le f(y_1 \dots y_n)$

f не е монотонна $\Leftrightarrow$ $\exists x_1 \dots x_n$, $\exists y_1 \dots y_n$ т.ч. $y_1 \ge x_1$ ... $y_n \ge x_n$ и $f(y_1 \dots y_n) = 0$ и $f(x_1 \dots x_n) = 1$

$\exists i$, $\exists x_1 \dots x_n$, $\exists y_1 \dots y_n$ т.ч. $f(x_1 \dots \underset{i}{0} \dots x_n) = 1$ и $f(x_1 \dots \underset{i}{1} \dots x_n) = 0$

Проверка

xyz	f
000	
001	
010	
011	
100	
101	
110	
111	

Монотонна

В